

Л. А. ДОРФМАН

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ
СОПРОТИВЛЕНИЕ
И ТЕПЛОТДАЧА
ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ТЕЛ

ОЗОН-ИЗДАТЕЛЬСТВО

Л. А. ДОРФМАН

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ
СОПРОТИВЛЕНИЕ
И ТЕПЛОТДАЧА
ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ

7

9

9

11

12

14

14

23

25

32

34

42

50

55

55

60

62

64

68

68

69



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Глава I. Основные уравнения	9
§ 1. Дифференциальные уравнения движения	9
§ 2. Уравнения Рейнольдса для осредненного турбулентного движения	11
§ 3. Уравнение баланса энергии	12
Глава II. Ламинарное течение вокруг вращающегося в свободном пространстве диска	14
§ 4. Ламинарное движение, создаваемое вращающимся диском. Точное решение уравнений Навье-Стокса	14
§ 5. Приближенный расчет ламинарного пограничного слоя на вращающемся диске	23
§ 6. Влияние обдува диска перпендикулярным к его поверхности потоком	25
§ 7. Приближенный расчет влияния обдува	32
§ 8. Влияние равномерного отсоса по поверхности диска	34
§ 9. Течение вокруг диска при внезапном разгоне и остановке	42
§ 10. Общий случай неустановившегося движения вязкой жидкости вокруг вращающегося диска при постепенном разгоне	50
Глава III. Переход ламинарного течения вокруг вращающегося диска в турбулентное	55
§ 11. Общая картина явления	55
§ 12. Метод малых колебаний для исследования устойчивости ламинарного течения	60
§ 13. Вариационный метод решения задачи	62
§ 14. Приложение к случаю вращающегося диска	64
Глава IV. Турбулентное течение вокруг вращающегося в свободном пространстве диска	68
§ 15. Интегральные соотношения пограничного слоя на вращающемся диске	68
§ 16. Решение Кармана для степенного профиля скоростей	69

Дорфман Лев Абрамович

Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел

Редактор С. Х. Наткович

Техн. редактор *Е. А. Ермакова*

Корректор *Л. О. Сечейко*

Сдано в набор 9/XII 1959 г. Подписано к печати 2/IV 1960 г. Бумага 84×108/32.
Физ. печ. л. 8,125. Условн. печ. л. 13,33. Уч.-изд. л. 12,90. Тираж 5500 экз. Т-01066.
Цена книги 8 руб. 45 коп. Заказ № 944.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

§ 17. Применение логарифмического профиля скоростей	73
§ 18. Сравнение с экспериментальными данными	79
§ 19. Влияние шероховатости поверхности диска	82
§ 20. Влияние обдува диска при турбулентном режиме	87
Глава V. Теплоотдача вращающегося в свободном пространстве диска	93
§ 21. Нагревание вязкой жидкости вращающимся диском. Точное решение уравнения баланса энергии	93
§ 22. Использование приближенного решения для расчета теплоотдачи вращающегося диска при ламинарном режиме	102
§ 23. Аналогия Рейнольдса для теплоотдачи вращающегося диска ($P = 1$)	104
§ 24. Влияние числа P при квадратичном распределении температурных напоров	107
§ 25. Расчет теплоотдачи при произвольном распределении температурных напоров по радиусу	110
§ 26. Сравнение приближенного решения с точным	113
§ 27. Сравнение с опытными данными	115
§ 28. Влияние обдува диска на теплоотдачу	118
Глава VI. Течение вокруг диска, вращающегося в ограниченном пространстве	119
§ 29. Вращение диска в очень узком кожухе	119
§ 30. Ламинарное течение между вращающимся и неподвижным дисками неограниченных размеров	122
§ 31. Вращательное движение жидкости над неподвижным основанием	125
§ 32. Ламинарное течение вокруг диска в кожухе при больших числах R	130
§ 33. Турбулентный режим для диска, вращающегося в кожухе	135
§ 34. Влияние шероховатости	139
§ 35. Приближенный учет влияния расхода жидкости через зазор между вращающимся диском и кожухом	143
§ 36. Опытное изучение течения вокруг диска, вращающегося в кожухе	147
§ 37. Приближенный расчет потока между двумя вращающимися дисками	156
§ 38. Теплоотдача диска, вращающегося в кожухе	160
§ 39. Нестационарное течение с теплопередачей в вязкой несжимаемой жидкости между двумя вращающимися дисками при наличии вдува	162
Глава VII. Вращение кругового цилиндра в вязкой среде	166
§ 40. Неизотермическое течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами	166
§ 41. Неизотермическое течение сжимаемого вязкого газа вокруг вращающегося цилиндра	171

§ 42. Об эффекте Ранка	183
§ 43. Устойчивость течения между двумя вращающимися цилиндрами	184
§ 44. Турбулентное течение вокруг вращающегося цилиндра	193
§ 45. Теплоотдача при вращении кругового цилиндра для турбулентного режима	206
§ 46. О нестационарном вращении цилиндра	212
Глава VIII. Вращение осесимметричного тела в осевом потоке вязкой жидкости	215
§ 47. Составление интегральных соотношений импульсов	215
§ 48. Выбор распределения скоростей	218
§ 49. Преобразование уравнений импульсов	220
§ 50. Начальные значения в точке разветвления потока	224
§ 51. Момент вращения и коэффициент сопротивления	228
§ 52. Примеры расчетов. Сравнение с опытами	229
§ 53. Вращение шара в неограниченной неподвижной среде	239
§ 54. Вращающийся полубесконечный цилиндр в однородном потоке	245
§ 55. Влияние сжимаемости	247
§ 56. Турбулентное течение около вращающегося осесимметричного тела, обтекаемого осевым потоком	251

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи о течениях вокруг вращающихся осесимметричных тел возникли в первую очередь из потребностей турбомашиностроения. Еще в конце прошлого века были предприняты опыты по определению мощности, затрачиваемой на вращение дисков паровых турбин. Так как роторы различных турбомашин содержат как необходимый элемент плоские поверхности, перпендикулярные к оси вращения, то вопрос о течении вокруг вращающегося диска до сего времени привлекает внимание исследователей. Много внимания уделяется также такому элементу вращающихся роторов, как круговой цилиндр.

В связи с потребностями газотурбостроения и применением пара высоких температур в паровых турбинах особое значение в последнее время приобрел вопрос о теплоотдаче вращающихся элементов турбомашин, в первую очередь диска и цилиндра. Исследования теплоотдачи вращающихся тел предпринимались также для разработки методов охлаждения электрических машин. Вопросы, связанные с сопротивлением и теплоотдачей вращающихся тел, возникают и в других областях техники, например в связи с полетом вращающихся снарядов, в теории подшипников скольжения и т. п.

Теоретическому рассмотрению гидродинамического сопротивления и теплоотдачи вращающихся тел и посвящена настоящая книга. В ней приводятся также основные результаты опытных исследований, которые сопоставляются с теоретическими решениями. Подробное представление о содержании книги дает оглавление.

Заметим, что в некоторых случаях в книге приводятся различные решения одной и той же задачи с тем, чтобы читатель приобрел опыт, необходимый для решения других подобных задач, связанных с гидродинамикой вращающихся тел, которые могут встретиться в его практике.

Книга может представить интерес для инженеров и исследователей, занимающихся техническими приложениями гидродинамики вязкой жидкости и газа, а также для студентов и аспирантов.

Автор считает своим долгом выразить глубокую признательность профессору Л. Г. Лойцянскому, ценные советы которого способствовали написанию настоящей книги.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Дифференциальные уравнения движения

В настоящей главе будут рассмотрены уравнения для течений несжимаемой вязкой жидкости при малых температурных напорах, когда можно пренебречь влиянием температуры на плотность ρ , вязкость μ и теплопроводность λ жидкости.

В дальнейшем по необходимости будут введены соответствующие усложнения в уравнениях, связанные с условиями сжимаемости и интенсивного подогрева.

Для осесимметричных движений жидкости наиболее естественно представить уравнения движения в цилиндрической системе координат r, φ, z . При этом ввиду осевой симметрии производные встречающихся в уравнениях величин по φ будут равны нулю.

Поэтому в случае несжимаемой вязкой жидкости при постоянстве физических констант ρ, μ, λ уравнения Навье-Стокса осесимметричного движения без учета массовых сил примут вид¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_\varphi v_r}{r} &= \\ &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \right\} (1.1)$$

¹⁾ Лойцянский Л. Г., Аэродинамика пограничного слоя, Гостехиздат, 1941, стр. 52.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \right\} (1.1)$$

В этих уравнениях v_r , v_φ и v_z представляют собой соответственно радиальную, тангенциальную (окружную) и осевую составляющие вектора скорости, p — давление, ν — кинематическую вязкость.

К системе уравнений Навье-Стокса (1.1) присоединим еще уравнение неразрывности, которое для несжимаемой жидкости примет вид:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (1.2)$$

Решение систем (1.1), (1.2) требует задания начальных и граничных условий. Начальные условия определяются значениями искомых величин в начальный момент времени $t = t_0$, они имеют смысл для неустановившихся движений жидкости.

Граничные условия определяют поле скоростей на границах, а также давление на свободной поверхности жидкости и на поверхностях раздела. В частности, важное значение имеет такое граничное условие, как *условие прилипания* жидкости к твердой стенке, т. е. отсутствие относительной скорости скольжения жидкости по поверхности твердого тела.

Для компонентов касательных напряжений в случае осесимметричного течения будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \\ \tau_{z\varphi} &= \mu \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}, \\ \tau_{zr} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} (1.3)$$

§ 2. Уравнения Рейнольдса для осредненного турбулентного движения

Известно, что с увеличением скорости поток жидкости теряет устойчивый, упорядоченный характер, наступает неупорядоченное движение, в котором начинают играть существенную роль нерегулярные пульсации. Упорядоченное движение, наблюдающееся при малых скоростях, называется *ламинарным*, а неупорядоченное, наблюдающееся при больших скоростях — *турбулентным*.

Явления, связанные с потерей устойчивости ламинарного движения, будут рассмотрены в дальнейшем на конкретных примерах потоков вокруг вращающихся осесимметричных тел. Здесь мы лишь заметим, что в случае развитого турбулентного течения уравнения (1.1), (1.2) остаются в силе только для мгновенных действительных скоростей. Однако ввиду нерегулярности мгновенных скоростей и случайности характера пульсаций уравнения (1.1), (1.2) невозможно проинтегрировать. Поэтому Рейнольдс предложил их преобразовать в уравнения осредненного турбулентного движения. Для этого действительная скорость представляется в виде суммы двух слагаемых: *осредненной скорости* с составляющими \bar{v}_r , \bar{v}_φ , \bar{v}_z и *скорости турбулентных пульсаций* с составляющими v'_r , v'_φ , v'_z :

$$v_r = \bar{v}_r + v'_r, \quad v_\varphi = \bar{v}_\varphi + v'_\varphi, \quad v_z = \bar{v}_z + v'_z. \quad (1.4)$$

Сделаем подстановку этих соотношений в уравнения (1.1), (1.2) и произведем их осреднение во времени (обозначается чертой сверху), полагая, что операция осреднения обладает следующими свойствами:

$$\overline{\varphi'} = 0, \quad \overline{\varphi\psi} = \bar{\varphi} \cdot \bar{\psi}, \quad \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial s}} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial s}, \quad (1.5)$$

где s — одно из переменных r , φ , z , t ; φ , ψ — любые две функции этих переменных.

Тогда получим следующую систему уравнений осредненного осесимметричного движения вязкой несжимаемой жидкости — *уравнения Рейнольдса* — в цилиндрической системе

координат:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} - \frac{\bar{v}_\varphi^2}{r} = \\
 & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} - \frac{\bar{v}_r}{r^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial z^2} \right) - \\
 & \quad - \frac{\partial}{\partial r} (\overline{v_r'^2}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v_r' v_z'}) - \frac{\bar{v}_r'^2}{r} + \frac{\bar{v}_\varphi'^2}{r}, \\
 & \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial r} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial z} + \frac{\bar{v}_r \bar{v}_\varphi}{r} = \\
 & = \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial r} - \frac{\bar{v}_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_\varphi}{\partial z^2} \right) - \\
 & \quad - \frac{\partial}{\partial r} (\overline{v_r' v_\varphi'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v_\varphi' v_z'}) - 2 \frac{\bar{v}_r' v_\varphi'}{r}, \\
 & \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = \\
 & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} \right) - \\
 & \quad - \frac{\partial}{\partial r} (\overline{v_r' v_z'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v_z'^2}) - \frac{1}{r} \overline{v_r' v_z'}, \\
 & \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial t} + \frac{\bar{v}_r}{r} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0.
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Сопоставляя систему уравнений (1.6) с уравнениями (1.1), замечаем, что к вязким членам уравнений (1.1) добавляются члены, соответствующие турбулентным напряжениям трения, возникающим благодаря турбулентным пульсациям скорости.

§ 3. Уравнение баланса энергии

Не останавливаясь на выводе¹⁾, приведем уравнение баланса энергии для осесимметричного потока несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned}
 \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \\
 + \mu \left\{ 2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \right. \\
 \left. + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \right\}, \tag{1.7}
 \end{aligned}$$

¹⁾ Лойцянский Л. Г., Аэродинамика пограничного слоя, Гостехиздат, 1941, стр. 53.

где T — температура, c_p — теплоемкость при постоянном давлении. Член в фигурных скобках соответствует диссипации (рассеиванию) энергии в результате трения.

В случае турбулентного режима можно из уравнения (1.7) получить соответствующее осредненное уравнение баланса энергии.

Без учета диссипации оно примет вид:

$$\begin{aligned}
 \rho c_p \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) = \\
 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} - \rho c_p r \overline{v_r' T'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} - \rho c_p \overline{v_z' T'} \right). \tag{1.8}
 \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае постоянства физических констант ρ , c_p , μ , λ уравнение баланса энергии можно решить, определив сначала поле скоростей по уравнениям движения. При решении уравнения баланса энергии следует удовлетворить заданным начальным и граничным условиям для распределения температуры. В частности, аналогично условию прилипания одним из граничных условий для температур является условие *отсутствия скачка температур* между обтекаемой поверхностью и прилипающими частицами жидкости.

градиенту окружной составляющей скорости около стенки, т. е. $\sim \frac{\mu r \omega}{\delta}$ (\sim — знак пропорциональности). Исключая касательное напряжение $\tau_{\text{ст}}$ из соотношений

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\text{ст}} \sin \vartheta &\sim \rho r \omega^2 \delta, \\ \tau_{\text{ст}} \cos \vartheta &\sim \mu \frac{r \omega}{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

и принимая, что угол ϑ не зависит от радиуса, что подтверждается наблюдениями, мы получим:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}, \quad (2.3)$$

следовательно, толщина увлекаемого диском слоя *одинакова на всех радиусах*.

Отсюда следует, что касательное напряжение

$$\tau_{\text{ст}} \sim \rho r \omega^2 \delta \sim \rho r \omega \sqrt{\nu \omega},$$

а момент сопротивления диска радиуса R , который пропорционален произведению касательного напряжения, площади и плеча, будет

$$M \sim \tau_{\text{ст}} R^3 \sim \rho R^4 \omega \sqrt{\nu \omega}. \quad (2.4)$$

Из этих рассуждений следует, что для интегрирования уравнений (1.1), (1.2) целесообразно ввести вместо z безразмерное расстояние от стенки $\zeta \sim \frac{z}{\delta}$, т. е. принять

$$\zeta = z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}. \quad (2.5)$$

Очевидно, что составляющие v_r и v_φ пропорциональны $r\omega$, где множители пропорциональности есть функции ζ , а составляющая v_z вследствие уравнения неразрывности должна быть пропорциональна $\delta\omega = \sqrt{\nu\omega}$.

Таким образом, целесообразно сделать следующую замену переменных¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} v_r &= r\omega F(\zeta), & v_\varphi &= r\omega G(\zeta), & v_z &= \sqrt{\nu\omega} H(\zeta), \\ p &= -\rho\nu\omega P(\zeta). \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

¹⁾ Kármán Th., Laminare und turbulente Reibung, ZAMM, т. 1. 1921.

ГЛАВА II

ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВОКРУГ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДИСКА

§ 4. Ламинарное движение, создаваемое вращающимся диском. Точное решение уравнений Навье-Стокса

Пусть бесконечная плоская пластинка $z=0$ вращается в вязкой жидкости вокруг оси $r=0$ с постоянной угловой скоростью ω .

Рассматриваем движение жидкости в полупространстве $z \geq 0$. Граничные условия задачи будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} v_r &= 0, & v_\varphi &= r\omega, & v_z &= 0 & \text{при } z=0, \\ v_r &= 0, & v_\varphi &= 0 & & & \text{при } z=\infty. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Скорость v_z при $z=\infty$ не может быть равна нулю, так как диск действует в качестве центробежного вентилятора и вызывает подсос, создавая отрицательное значение v_z в бесконечности и радиальное движение от центра, в особенности вблизи диска.

Оценим вначале толщину δ слоя жидкости, увлекаемого диском вследствие трения¹⁾. Пусть направление, в котором вдоль диска скользит поток и которое параллельно касательному напряжению на стенке $\tau_{\text{ст}}$, образует с окружным направлением угол ϑ . Тогда радиальная составляющая касательного напряжения равна $\tau_{\text{ст}} \sin \vartheta$. Она уравновешивается центробежной силой отбрасываемого пластинкой потока, т. е. пропорциональна $\rho r \omega^2 \delta$. С другой стороны, окружная составляющая касательного напряжения $\tau_{\text{ст}} \cos \vartheta$ пропорциональна

¹⁾ Прандтль Л., Гидроаэромеханика, перев. с нем. ИЛ, 1949, стр. 436.

Подстановка (2.6) приводит уравнения (1.1), (1.2) к виду (штрихами обозначены производные по ζ):

$$\left. \begin{aligned} F^2 - G^2 + F'H &= F'', \\ 2FG + G'H &= G'', \\ HH' &= P' + H'', \\ 2F + H' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

а граничные условия будут:

$$\left. \begin{aligned} F=0, \quad G=1, \quad H=0 & \text{ при } \zeta=0, \\ F=0, \quad G=0 & \text{ при } \zeta=\infty. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Заметим, что при такой замене вязкие члены в правой части уравнений (1.1) сводятся только к последним слагаемым, представляющим производные по направлению, нормальному к плоскости диска, так что уравнения движения тождественны уравнениям пограничного слоя.

Первые два уравнения (2.7) совместно с последним дают возможность определить F , G , H , а третье — значения P . Если $H \rightarrow -c$ при $\zeta \rightarrow \infty$, то можно формально построить¹⁾ разложения по степеням $e^{-c\zeta}$ для F , G и H , удовлетворяющие дифференциальным уравнениям и условиям на бесконечности. Нетрудно определить, что первыми членами разложений будут

$$\left. \begin{aligned} F &= Ae^{-c\zeta} - \frac{A^2 + B^2}{2c^2} e^{-2c\zeta} + \frac{A(A^2 + B^2)}{4c^4} e^{-3c\zeta} - \\ &\quad - \frac{A^2 + B^2}{144c^6} (17A^2 + B^2) e^{-4c\zeta} + \dots, \\ G &= Be^{-c\zeta} - \frac{B(A^2 + B^2)}{12c^4} e^{-3c\zeta} + \\ &\quad + \frac{AB(A^2 + B^2)}{18c^6} e^{-4c\zeta} + \dots, \\ H &= -c + \frac{2A}{c} e^{-c\zeta} - \frac{A^2 + B^2}{2c^3} e^{-2c\zeta} + \\ &\quad + \frac{A(A^2 + B^2)}{6c^5} e^{-3c\zeta} - \frac{A^2 + B^2}{288c^7} (17A^2 + B^2) e^{-4c\zeta} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Остается определить только значения постоянных A , B и c .

¹⁾ Cochrane W. G., The flow due to rotating disc, Proc. Camb. Philos. Soc., т. 30, № 3, 1934.

С другой стороны, можно получить формальное разложение вблизи $\zeta=0$, удовлетворяющее (2.7) и граничным условиям при $\zeta=0$:

$$\left. \begin{aligned} &= a_0 \zeta - \frac{1}{2} \zeta^2 - \frac{1}{3} b_0 \zeta^3 - \frac{1}{12} b_0^2 \zeta^4 - \frac{1}{60} a_0 \zeta^5 + \\ &\quad + \left(\frac{1}{360} - \frac{a_0 b_0}{90} \right) \zeta^6 + \left(\frac{b_0}{315} + \frac{a_0 b_0^2}{1260} \right) \zeta^7 + \dots, \\ &= 1 + b_0 \zeta + \frac{1}{3} a_0 \zeta^3 + \frac{1}{12} (a_0 b_0 - 1) \zeta^4 - \frac{b_0}{15} \zeta^5 - \\ &\quad - \left(\frac{a_0^2}{90} + \frac{b_0^2}{45} \right) \zeta^6 + \left(\frac{a_0}{315} - \frac{b_0^3}{315} - \frac{a_0^2 b_0}{252} \right) \zeta^7 + \dots, \\ &= -a_0 \zeta^2 + \frac{1}{3} \zeta^3 + \frac{1}{6} b_0 \zeta^4 + \frac{1}{30} b_0^2 \zeta^5 + \frac{1}{180} a_0 \zeta^6 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

где a_0 , b_0 — неизвестные постоянные.

Значения постоянных A , B , c , a_0 , b_0 находятся из условия непрерывного сращивания значений функций F , G и H и их производных, получаемых из разложений (2.9) и (2.10). Если задаться приближенными значениями a_0 и b_0 , то с помощью (2.10) находятся величины F , G и H и их производные для малых значений ζ . Затем методом Адамса можно продолжить решения дифференциальных уравнений (2.7) к большим значениям ζ . Сравнением полученных значений функций и их производных в точках $\zeta=1,9$ и $2,5$ со значениями, которые даются разложениями (2.9), Кокрэн¹⁾ численным путем уточнил величины постоянных a_0 и b_0 и нашел значения c , A и B . Его результаты дают:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 0,510; \quad b_0 = -0,616; \\ c &= 0,886; \quad A = 0,934; \quad B = 1,208. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Значения функций F , G , H , H' , G' и P , вычисленные Кокрэном, приводятся в таблице 1. Первые три функции графически представлены на рис. 1. Из графиков видно, что расстояние от стенки, на котором окружная скорость течения понижается до половины окружной скорости стенки, равно $\delta_{0,5} \approx \sqrt{\nu/\omega}$.

¹⁾ См. сноску на стр. 16.

Таблица 1

Значения функций, определяющих распределение скоростей и давления вблизи диска, вращающегося в неподвижной жидкости (по В. Кокрэну)

$\zeta = z \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}$	F	G	$-H$	$-P$	F'	$-G'$
0	0	1,000	0	0	0,510	0,616
0,1	0,046	0,939	0,005	0,092	0,416	0,611
0,2	0,084	0,878	0,018	0,167	0,334	0,599
0,3	0,114	0,819	0,038	0,228	0,262	0,580
0,4	0,136	0,762	0,063	0,275	0,200	0,558
0,5	0,154	0,708	0,092	0,312	0,147	0,532
0,6	0,166	0,656	0,124	0,340	0,102	0,505
0,7	0,174	0,607	0,158	0,361	0,063	0,476
0,8	0,179	0,561	0,193	0,377	0,032	0,448
0,9	0,181	0,517	0,230	0,388	0,006	0,419
1,0	0,180	0,468	0,266	0,395	-0,016	0,391
1,1	0,177	0,439	0,301	0,400	-0,033	0,364
1,2	0,173	0,404	0,336	0,403	-0,046	0,338
1,3	0,168	0,371	0,371	0,405	-0,057	0,313
1,4	0,162	0,341	0,404	0,406	-0,064	0,290
1,5	0,156	0,313	0,435	0,406	-0,070	0,268
1,6	0,148	0,288	0,466	0,405	-0,073	0,247
1,7	0,141	0,264	0,495	0,404	-0,075	0,228
1,8	0,133	0,242	0,522	0,403	-0,076	0,210
1,9	0,126	0,222	0,548	0,402	-0,075	0,193
2,0	0,118	0,203	0,572	0,401	-0,074	0,177
2,1	0,111	0,186	0,596	0,399	-0,072	0,163
2,2	0,104	0,171	0,617	0,398	-0,070	0,150
2,3	0,097	0,156	0,637	0,397	-0,067	0,137
2,4	0,091	0,143	0,656	0,396	-0,065	0,126
2,5	0,084	0,131	0,674	0,395	-0,061	0,116
2,6	0,078	0,120	0,690	0,395	-0,058	0,106
2,8	0,068	0,101	0,721	0,395	-0,052	0,089
3,0	0,058	0,083	0,746	0,395	-0,046	0,075
3,2	0,050	0,071	0,768	0,395	-0,040	0,063
3,4	0,042	0,059	0,786	0,394	-0,035	0,053
3,6	0,036	0,050	0,802	0,394	-0,030	0,044
3,8	0,031	0,042	0,815	0,393	-0,025	0,037
4,0	0,026	0,035	0,826	0,393	-0,022	0,031
4,2	0,022	0,029	0,836	0,393	-0,019	0,026
4,4	0,018	0,024	0,844	0,393	-0,016	0,022
∞	0	0	0,886	0,393	0	0

На рис. 2 приведены результаты замеров Грегори и Волкера¹⁾ поля скоростей около вращающегося диска при ламинарном режиме. Изображаются значения полной касательной скорости $V_T = \sqrt{v_r^2 + v_\phi^2}$ и угла $\Phi = \text{arctg} \frac{F}{G}$, который составляет вектор полной касательной скорости с окружным направлением. Сплошными линиями изображены значения,

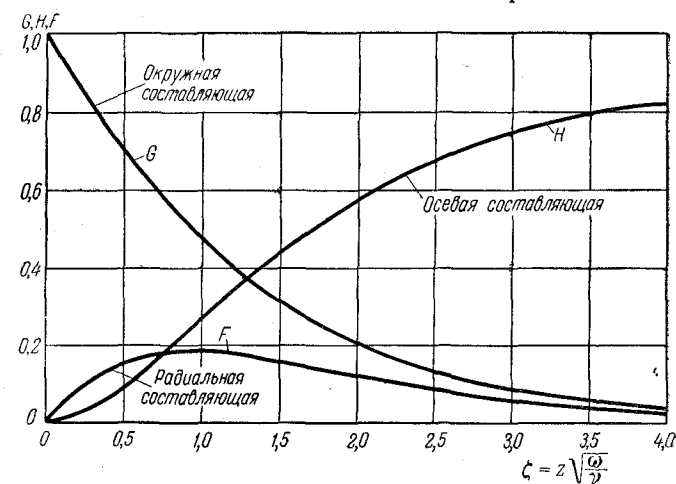


Рис. 1. Распределение скоростей около диска, вращающегося в неподвижной жидкости (по Кокрэну).

взятые из расчетов Кокрэна. С учетом погрешностей замеров следует признать хорошим соответствие опытных и теоретических величин. Замеры показывают также, что значения F и G на всех радиусах одинаковы, т. е. толщина пограничного слоя не зависит от радиуса.

Полученное решение справедливо лишь для бесконечной вращающейся пластинки. Однако, пренебрегая влиянием кромки, можно определить момент сил трения для вращающегося диска радиуса R , если только этот радиус велик по сравнению с толщиной слоя, увлекаемого диском.

¹⁾ Gregory N., Stuart J. T. and Walker W. S., On the stability of three-dimensional boundary layers with application to the flow due to a rotating disc Philos. Transaction Roy. Soc., ser. A. т. 248, № 943, 1955.

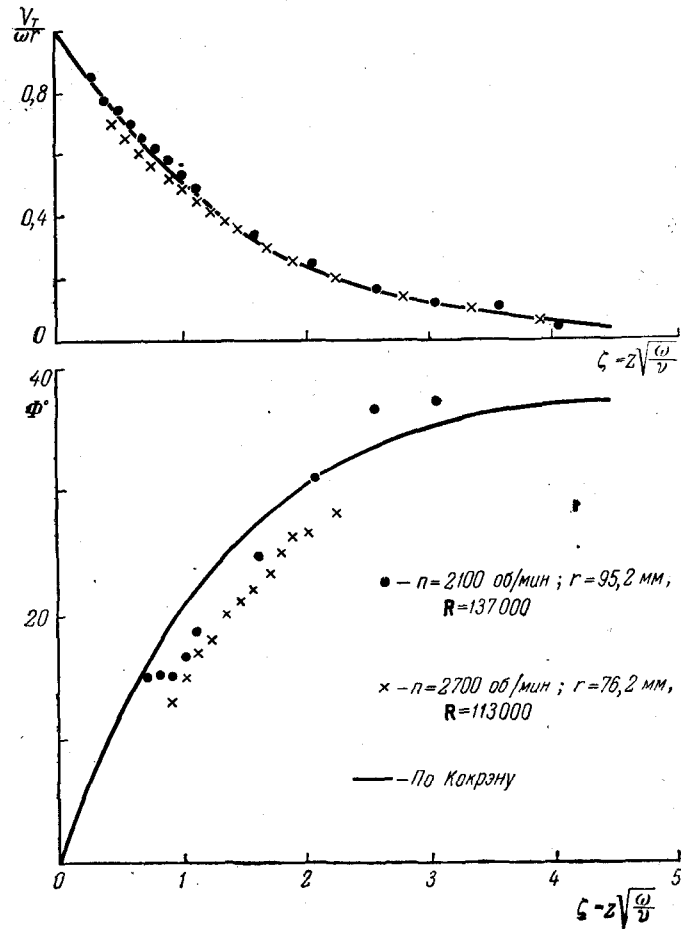


Рис. 2. Сравнение расчетных и опытных значений полной касательной скорости вблизи вращающегося диска (по Грегори и Волкеру).

Кольцо шириной dr и радиуса r дает момент сопротивления

$$dM = -2\pi r dr r \tau_{z\varphi},$$

где

$$\tau_{z\varphi} = \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)_0 = \rho r \nu^{\frac{1}{2}} \omega^{\frac{3}{2}} G'(0) \quad (2.12)$$

есть окружная составляющая касательного напряжения. Следовательно, момент сопротивления всего диска, смачиваемого с одной стороны, равен

$$M = -2\pi \int_0^R r^2 \tau_{z\varphi} dr. \quad (2.13)$$

Окончательно, подставив значение $\tau_{z\varphi}$, получим:

$$2M = 0,616 \pi \rho R^4 (\nu \omega^3)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.14)$$

Безразмерный коэффициент момента сопротивления, определяемый обычно формулой

$$c_M = \frac{2M}{\frac{\rho}{2} \omega^2 R^5}, \quad (2.15)$$

равен

$$c_M = \frac{2\pi G'(0) \nu^{\frac{1}{2}}}{R \omega^{\frac{1}{2}}} \quad (2.16)$$

или, если ввести число Рейнольдса

$$R = \frac{R^2 \omega}{\nu},$$

получим:

$$c_M = \frac{3,87}{R^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.17)$$

Эта формула изображена на рис. 3 кривой 1. Там же представлены опытные данные. До числа $R = 3 \cdot 10^5$ совпадение теории с измерениями Теодорсена и Регира¹⁾ очень

¹⁾ Theodorsen Th. and Regier A., Experiments on drag of revolving discs, cylinders and streamline rods at high speeds, NACA Report № 793, 1944.

хорошее, несколько хуже соответствие со старыми опытами Шмидта и Кемпфа¹⁾.

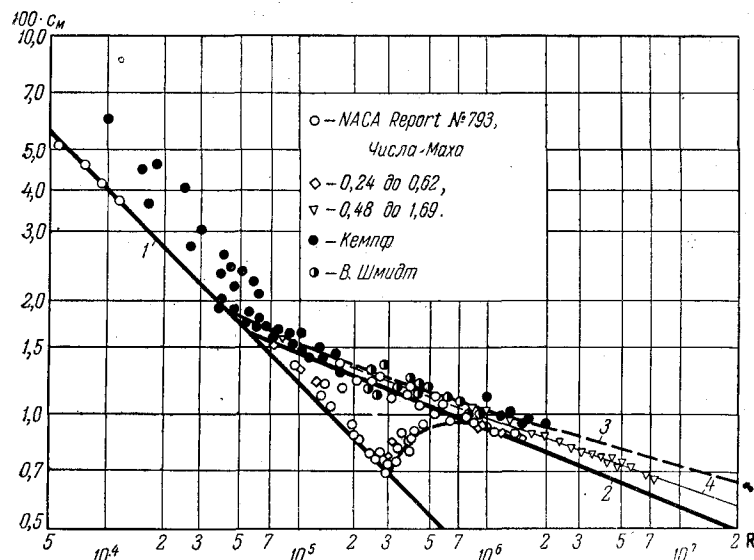


Рис. 3. Коэффициент момента сопротивления диска, вращающегося в неподвижной жидкости: 1 — ламинарное течение [формула (2.17)]; 2 — турбулентное течение [формула (4.10)]; 3 — формула (4.24); 4 — формула (4.35).

Секундный объем жидкости, отбрасываемый вследствие центробежного эффекта с одной стороны диска, равен

$$Q = 2\pi R \int_{z=0}^{\infty} v_r dz.$$

Вычислив интеграл, получим:

$$Q = 0,886\pi R^2 \sqrt{v\omega} = 0,886\pi R^3 \omega R^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.18)$$

Такой же секундный объем жидкости притекает к диску в осевом направлении.

¹⁾ Schmidt W., Z. VDI, т. 65, 1921; Kempf G., Über Reibungswiderstand rotierender Scheiben, Vorträge auf d. Gebiete d. Hydro- und Aerodynamik, Berlin, 1924.

§ 5. Приближенный расчет ламинарного пограничного слоя на вращающемся диске

Пользуясь идеей Н. А. Слезкина о замене точных уравнений движения приближенными, учитывающими влияние инерционных членов лишь частично, С. М. Тарг¹⁾ решает приближенно уравнения движения для диска. При этом, имея в виду плавность течения в пограничном слое диска, он заменяет стоящие в левых частях уравнений (1.1), (1.2) компоненты ускорения частиц среды их средними по толщине пограничного слоя значениями. Тогда уравнения (1.1), (1.2) можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} + rA(r), \\ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_\varphi)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} &= rB(r), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

где обозначено

$$\left. \begin{aligned} A(r) &= \frac{1}{vr\delta} \int_0^\delta \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} \right) dz, \\ B(r) &= \frac{1}{vr\delta} \int_0^\delta \left(v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} \right) dz. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Третье уравнение (1.1) мы исключили, так как оно служит лишь для определения давления.

На внешней границе пограничного слоя полагаем, как и ранее, что имеется только осевая составляющая скорости (вследствие подсоса), а трение $\tau_{z\varphi}$ на этой границе равно нулю. Вместе с условиями прилипания среды к плоскости диска система граничных условий будет следующая:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } z=0 \quad v_r = v_z = 0, \quad v_\varphi = \omega r, \\ \text{при } z=\delta \quad v_r = v_\varphi = 0, \quad \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

¹⁾ Тарг С. М., Основные задачи теории ламинарных течений, Гостехиздат, 1951.

Решение разыскивается, как и ранее (см. § 4), в виде

$$v_r = rf(z), \quad v_\varphi = rg(z), \quad v_z = h(z), \quad (2.22)$$

что предполагает постоянство δ вдоль радиуса $\delta = \delta_0 = \text{const}$. Подставив эти значения в (2.19) и принимая во внимание, что в рассматриваемой задаче $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$, приходим к следующим уравнениям:

$$f''(z) = A, \quad g''(z) = B, \quad 2f(z) + h' = 0. \quad (2.23)$$

Так как в первых двух уравнениях левые части — функции от z , а правые — функции от r , то отсюда следует, что A и B — постоянные.

Уравнения (2.23) при граничных условиях (2.21) дают следующие решения:

$$\left. \begin{aligned} f &= -\frac{1}{2} A \delta_0^2 (\xi - \xi^2), & g &= \omega (1 - \xi)^2, \\ h &= \frac{1}{6} A \delta_0^3 (3\xi^2 - 2\xi^3), & B &= \frac{2\omega}{\delta_0^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

где обозначено $\xi = \frac{z}{\delta_0}$.

Для определения оставшихся неизвестными величин A и δ_0 воспользуемся равенствами (2.20), подставив значения v_r , v_φ , v_z и B из (2.22), (2.24). Тогда получим уравнения

$$40\nu A = A^2 \delta_0^4 - 8\omega^2, \quad 20\nu = -A \delta_0^4,$$

откуда находим:

$$A = -\frac{2}{15} \frac{\omega^2}{\nu}, \quad \delta_0 = 3,50 \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}. \quad (2.25)$$

Пользуясь этим решением, получаем достаточно близкое к точному [формула (2.17)] значение коэффициента момента сопротивления

$$c_M = 3,6R^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.26)$$

Полученное решение можно уточнить. Для этого обратимся ко второму из уравнений (1.1), отбросив в правой части члены, содержащие $\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}$, $\frac{v_\varphi}{r}$, как малые по сравнению с производными по z ; в левой части заменим v_r , v_φ и v_z

значениями, определенными формулами (2.22), (2.24). При этом все компоненты считаем функциями ξ . В результате получим уравнение второго приближения:

$$\frac{1}{\delta_{01}^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \xi^2} = 0,545r \frac{\omega^2}{\nu} (3\xi - 6\xi^2 + 4\xi^3 - \xi^4),$$

где δ_{01} — второе приближение неизвестной толщины пограничного слоя.

Интегрируя это уравнение с удовлетворением граничным условиям для v_φ по (2.21), найдем:

$$v_\varphi = \omega r - 0,01816r \frac{\omega^2}{\nu} \delta_{01} (9\xi - 15\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5 + \xi^6).$$

Из условия $v_\varphi = 0$ при $\xi = 1$ при этом получим:

$$\delta_{01} = 3,71 \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}. \quad (2.27)$$

Величина c_M получается равной

$$c_M = 3,82R^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.28)$$

отличаясь от точного решения на 1,3%.

§ 6. Влияние обдува диска перпендикулярным к его поверхности потоком

Пусть вращающийся диск обдувается осесимметричным потоком, перпендикулярным к его поверхности. На внешней границе пограничного слоя осесимметричный потенциальный поток в пространстве $z \geq 0$ описывается уравнениями:

$$V_r = ar, \quad V_\varphi = 0, \quad V_z = -2az. \quad (2.29)$$

Для выяснения кинематического смысла параметра a рассмотрим потенциальное обтекание круговой пластины радиуса R перпендикулярным к ее поверхности однородным потоком со скоростью в бесконечности W_∞ . Согласно известному решению¹⁾ потенциал такого потока вдоль оси течения равен

$$\varphi = \frac{2}{\pi} W_\infty z \left(-\frac{R}{z} + \text{arctg} \frac{z}{R} \right). \quad (2.30)$$

¹⁾ Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, Гостехиздат, т. 1, 1948, стр. 359.

Вблизи поверхности диска на оси $r=0$ производная от осевой скорости течения примет значение

$$\left. \frac{\partial V_z}{\partial z} \right|_{z \rightarrow 0} = \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right|_{z \rightarrow 0} = -\frac{2}{\pi} W_\infty \frac{2}{R}, \quad (2.31)$$

в то время как из уравнений (2.29) эта производная равна $-2a$.

Отсюда следует, что параметр a выражается через скорость однородного потока W_∞ , набегающего на диск радиуса R перпендикулярно к его поверхности, по формуле

$$a = \frac{2}{\pi} \frac{W_\infty}{R}. \quad (2.32)$$

Отношение скорости W_∞ набегающего потока к окружной скорости $R\omega$ на радиусе R определяется величиной a/ω в виде

$$\frac{W_\infty}{R\omega} = \frac{\pi}{2} \frac{a}{\omega}. \quad (2.33)$$

Итак, систему уравнений (1.1), (1.2) при установившемся течении необходимо решить при граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} v_r = 0, \quad v_\varphi = r\omega, \quad v_z = 0 & \text{ при } z = 0, \\ v_r = ar, \quad v_\varphi = 0 & \text{ при } z = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Из уравнения неразрывности (1.2) (и условия конечности v_r при $r=0$) после интегрирования по r получим:

$$v_r = -\frac{r}{2} v'_z, \quad (2.35)$$

где штрих обозначает производную по z .

Далее, если обозначить

$$v_\varphi = rg(z), \quad (2.36)$$

то с учетом (2.35) второе уравнение системы (1.1) примет вид:

$$v_z g' - v'_z g = \nu g'', \quad (2.37)$$

а третье уравнение представится в виде

$$v_z v'_z = -\frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\rho} + \nu v''_z,$$

что после интегрирования по z дает

$$\frac{p}{\rho} = \nu v'_z - \frac{1}{2} v_z^2 + P(r). \quad (2.38)$$

Подставив (2.35), (2.36), (2.38) в первое уравнение (1.1), получим:

$$r \left(\frac{1}{2} v'_z \right)^2 - \frac{r}{2} v_z v''_z - r g^2 = -\frac{dP}{dr} - \frac{\nu}{2} r v'''_z. \quad (2.39)$$

Так как v_z и g не зависят от r , то ввиду того, что при $z \rightarrow \infty$ $v'_z \rightarrow -2a$, $g(z) \rightarrow 0$, отсюда получим:

$$\frac{dP}{dr} = -a^2 r,$$

и уравнение (2.39) примет вид:

$$\left(\frac{1}{2} v'_z \right)^2 - \frac{1}{2} v_z v''_z - g^2 = a^2 - \frac{\nu}{2} v'''_z. \quad (2.40)$$

Для приведения к безразмерному виду с исключением параметров вводим преобразования:

$$\zeta = z \left[\frac{a + \omega}{\nu} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad v_z = [\nu(a + \omega)]^{\frac{1}{2}} H(\zeta), \quad v_\varphi = r(a + \omega) G(\zeta). \quad (2.41)$$

Тогда уравнения (2.37), (2.40) дадут систему обыкновенных дифференциальных уравнений (штрих обозначает производную по ζ)

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{H'}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} H H'' - G^2 + \frac{1}{2} H''' &= \frac{\left(\frac{a}{\omega} \right)^2}{\left(1 + \frac{a}{\omega} \right)^2}, \\ H G' - H' G &= G', \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

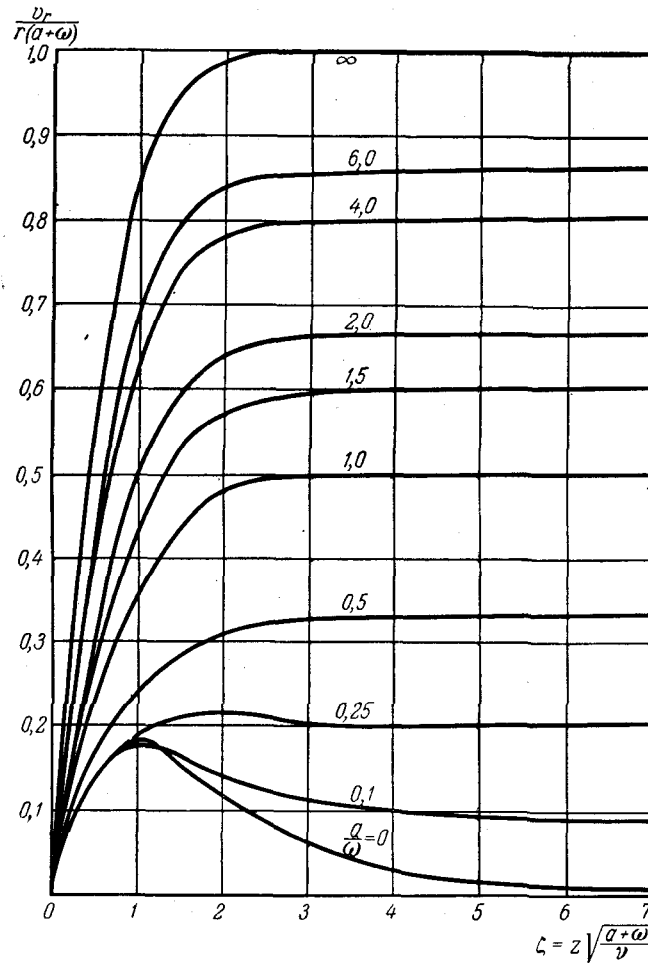


Рис. 4. Распределение радиальных скоростей около вращающегося диска, обдуваемого перпендикулярным потоком (по Тиффорду и Чжу Шень-до).

которые следует проинтегрировать при граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} H = H' = 0, \quad G = \frac{1}{1 + \frac{a}{\omega}} \quad \text{при } \zeta = 0, \\ H' = -\frac{2a}{\omega} : \left(1 + \frac{a}{\omega}\right), \quad G = 0 \quad \text{при } \zeta = \infty. \end{aligned} \right\} (2.43)$$

Осуществив численное интегрирование с помощью счетных машин, Тиффорд и Чжу Шень-до¹⁾ получили решения для различных значений параметра a/ω . Эти решения изображены графически на рис. 4—6. В предельном случае $\frac{a}{\omega} = 0$ решение совпадает с результатами Кокрена (§ 4), в другом предельном случае $\frac{a}{\omega} = \infty$ получается хорошее соответствие с решением Хомана²⁾ для задачи об осесимметричном потоке вблизи точки разветвления потока.

В таблице 2 приводятся значения коэффициентов моментов сопротивления и коэффициентов радиальной составляющей силы трения в зависимости от параметра a/ω . На рис. 7 изображено значение коэффициента влияния обдува

$$\Lambda \left(\frac{a}{\omega} \right) = \frac{\tau_{\varphi}}{\tau_{\varphi}} \Big|_{a=0} \quad (2.44)$$

для ламинарного режима (кривая 1) в зависимости от a/ω .

¹⁾ Tifford A. N., Scheng To Chu, On the flow and temperature fields in forced flow against a rotating disc., Proc. 2 US Nat. Congr. of Appl. Mech., 1955.

²⁾ Homann F., Der Einfluss großer Zähigkeit bei der Strömung um den Zylinder und um die Kugel, ZAMM, т. 16, 1936.

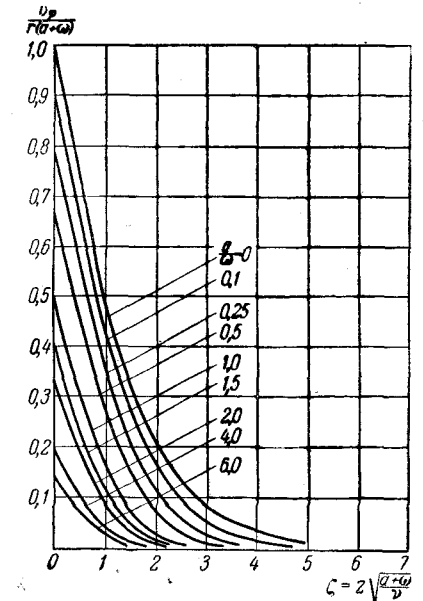


Рис. 5. Распределение окружных скоростей около вращающегося диска, обдуваемого перпендикулярным потоком (по Тиффорду и Чжу Шень-до).

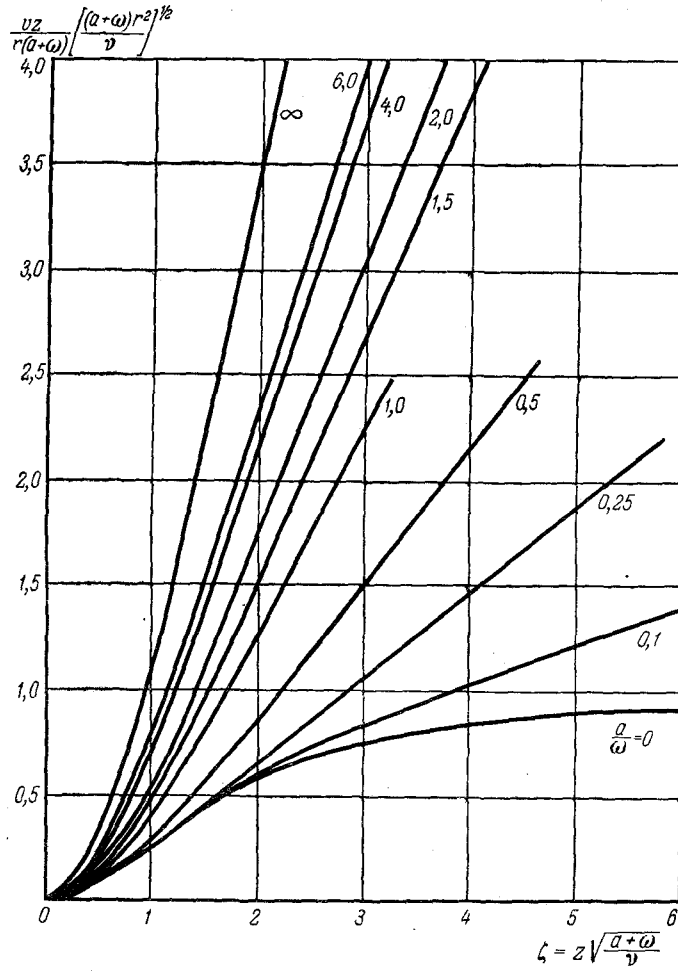


Рис. 6. Распределение осевых скоростей около вращающегося диска, обдуваемого перпендикулярным потоком (по Тиффорду и Чжу Шень-до).

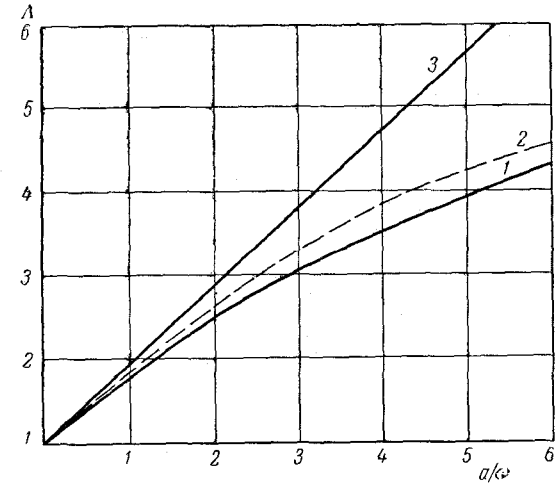


Рис. 7. Коэффициент влияния обдува: 1 — ламинарное течение, точное решение; 2 — ламинарное течение, приближенное решение; 3 — турбулентное течение.

Таблица 2

Значения коэффициента момента трения и коэффициента сопротивления вращающегося диска осевому потоку, перпендикулярному к плоскости диска (по Тиффорду и Чжу Шень-до)

$\frac{a}{\omega}$	$c_M \sqrt{\frac{\omega R^2}{\nu}} = \frac{2M \sqrt{\frac{\omega R^2}{\nu}}}{\frac{1}{2} \rho \omega^2 R^5}$	$c_W \sqrt{\frac{(a^2 + \omega^2)^{1/2} r^2}{\nu}} = \frac{\tau_r}{\frac{1}{2} \rho (a^2 + \omega^2) r^2} \sqrt{\frac{(a^2 + \omega^2)^{1/2} r^2}{\nu}}$
	0,	3,87
0,1	4,06	1,05
0,25	4,48	1,14
0,5	5,30	1,38
1,0	6,42	1,83
1,5	8,4	2,17
2,0	9,64	2,33
4,0	13,34	2,52
6,0	16,64	2,57
∞	—	2,61

§ 7. Приближенный расчет влияния обдува

Очень просто получается приближенное решение задачи об обдуве диска перпендикулярным к его поверхности потоком, если применить метод С. М. Тарга (см. § 5). Граничные условия задачи будут отличаться от (2.21) тем, что на внешней границе пограничного слоя v_r уже не будет равно нулю, а будет удовлетворять условию

$$v_r|_{z=\delta} = ar. \quad (2.45)$$

Кроме того, давление уже не будет постоянно вдоль радиуса. Для набегающего на диск потенциального потока

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho a^2 r.$$

Вместо системы уравнений (2.23) получим следующие уравнения:

$$f''(z) = A - \frac{a^2}{v}, \quad g''(z) = B, \quad 2f(z) + h'(z) = 0, \quad (2.46)$$

где A и B — постоянные. Для граничных условий задачи находим следующие решения этих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} f &= -\frac{1}{2} \left(A - \frac{a^2}{v} \right) \delta_0^3 (\xi - \xi^2) + a\xi, \\ g &= \omega (1 - \xi)^2, \\ h &= \frac{1}{6} \left(A - \frac{a^2}{v} \right) \delta_0^3 (3\xi^2 - 2\xi^3) - a\delta_0 \xi^2, \\ B &= \frac{12\omega}{\delta_0^3}. \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

Подставляя значения этих величин в интегральные выражения (2.20), получим уравнения для определения неизвестных значений A и δ_0 :

$$\left. \begin{aligned} vA &= \frac{1}{40} \left(A - \frac{a^2}{v} \right)^2 \delta_0^4 - \frac{1}{12} \left(A - \frac{a^2}{v} \right) a \delta_0^2 - \frac{\omega^2}{5}, \\ \frac{v}{\delta_0^2} &= -\frac{1}{20} \left(A - \frac{a^2}{v} \right) \delta_0^2 + \frac{1}{6} a. \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

откуда находим:

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{2\omega^2}{15v} + \frac{1}{3} \frac{a^2}{v}, \\ \delta_0^2 &= \frac{v}{\omega} \left[-\frac{12,5}{5 \frac{a}{\omega} + \frac{\omega}{a}} + \sqrt{\left(\frac{12,5}{5 \frac{a}{\omega} + \frac{\omega}{a}} \right)^2 + \frac{150}{5 \left(\frac{a}{\omega} \right)^2 + 1}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Момент трения пропорционален производной $\frac{dg_0}{dz}|_{z=0}$, которая равна

$$\frac{dg_0}{dz}|_{z=0} = -\frac{\omega}{\delta_0}. \quad (2.50)$$

Величина $\Lambda\left(\frac{a}{\omega}\right)$ поэтому будет равна

$$\Lambda\left(\frac{a}{\omega}\right) = \frac{\delta_0|_{a=0}}{\delta_0}, \quad (2.51)$$

где δ_0 определяется по формуле (2.49).

Полученное приближенное решение для $\Lambda\left(\frac{a}{\omega}\right)$ дает значения, достаточно близкие к точным, как это видно из рис. 7 (кривая 2).

Шлихтинг и Труккенбротт¹⁾ получили приближенное решение задачи об обдуве диска при ламинарном режиме методом Польгаузена, раздельно решая задачу для случаев $\frac{a}{\omega} \leq 1$ и $\frac{a}{\omega} > 1$. Впервые метод Польгаузена для задачи о течении вокруг вращающегося диска без обдува был применен Карманом²⁾. Решения этим методом получаются более громоздкие, чем методом Слезкина-Тарга.

¹⁾ Schlichting H. und Truckenbrodt E., Die Strömung an einer angeblasenen rotierenden Scheibe, ZAMM, т. 32, № 415, 1952.

²⁾ См. сноску на стр. 15.

§ 8. Влияние равномерного отсоса по поверхности диска

Стюарт¹⁾ рассмотрел задачу о влиянии равномерного отсоса по поверхности диска на ламинарное течение вокруг вращающегося диска и дал ей изящное решение.

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений (2.7) в этом случае следует решить при граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} F=0, \quad G=1, \quad H=-k \quad \text{при } \zeta=0, \\ F=G=0 \quad \quad \quad \text{при } \zeta=\infty, \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

где величина k есть параметр отсоса. При больших значениях k первые два уравнения (2.7) можно в первом приближении представить в виде

$$\left. \begin{aligned} F'' &= -kF' - G^2, \\ G'' &= -kG'. \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

Из второго уравнения этой системы при граничных условиях (2.52) получается

$$G = e^{-k\zeta}. \quad (2.54)$$

Тогда первое уравнение (2.53) дает

$$F = \frac{1}{2k^2} (e^{-k\zeta} - e^{-2k\zeta}). \quad (2.55)$$

Для получения полного решения введем новое переменное

$$\eta = k\zeta. \quad (2.56)$$

Система уравнений (2.7) без третьего уравнения, служащего для определения давления, преобразуется к виду:

$$\left. \begin{aligned} k^2 F'' &= F^2 + kF'H - G^2, \\ k^2 G'' &= 2FG + kG'H, \\ 0 &= 2F + kH'. \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

Знак дифференцирования (штрих) здесь обозначает дифференцирование по η .

¹⁾ Stuart I. T., On the effects of uniform suction on the steady flow due to a rotating disc, The quarterly Journal of Mech. and appl. Math., т. 7, № 4, 1954.

При больших значениях k решение разыскивается в виде рядов:

$$\left. \begin{aligned} H &= -k + \sum_{i=0}^{\infty} k^{-i} H_i(\eta), \\ F &= \sum_{i=0}^{\infty} k^{-i} F_i(\eta), \\ G &= \sum_{i=0}^{\infty} k^{-i} G_i(\eta). \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

Подставив их в (2.57) и приравнявая члены при одинаковых степенях k , получим рекуррентные системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} F_0'' + F_0' &= 0, \\ F_1'' + F_1' &= F_0' H_0, \\ F_0'' + F_2' &= F_0^2 - G_0^2 + F_0' H_1 + F_1' H_0, \\ &\dots \dots \dots \\ F_{2n}'' + F_{2n}' &= F_{n-1}^2 - G_{n-1}^2 + 2 \sum_{i=0}^{n-2} (F_i F_{2n-2-i} - G_i G_{2n-2-i}) + \\ &\quad + \sum_{i=0}^{2n-1} F_i' H_{2n-1-i} \quad (n \geq 2), \\ F_{2n+1}'' + F_{2n+1}' &= 2 \sum_{i=0}^{n-1} (F_i F_{2n-1-i} - G_i G_{2n-1-i}) + \\ &\quad + \sum_{i=0}^{2n} F_i' H_{2n-i} \quad (n \geq 1); \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

$$\left. \begin{aligned} G_0'' + G_0' &= 0, \\ G_1'' + G_1' &= H_0 G_0', \\ G_n'' + G_n' &= 2 \sum_{i=0}^{n-2} F_i G_{2n-2-i} + \sum_{i=0}^{n-1} H_i G_{n-1-i} \quad (n \geq 2); \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

$$\left. \begin{aligned} H_0' &= 0, \\ H_n' &= -2F_{n-1} \quad (n \geq 1). \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

Соответствующие граничные условия для этих уравнений будут:

$$\left. \begin{aligned} F_\nu = 0, \quad G_0 = 1, \quad G_\mu = 0, \quad H_\nu = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \\ F_\nu = G_\nu = 0 \quad \text{при } \eta = \infty \end{aligned} \right\} (2.62)$$

($\nu = 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$; $\mu = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$).

Решая последовательно эти уравнения при соответствующих граничных условиях, получим следующие выражения для искомых функций при больших значениях параметра k :

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{2k^2} \cdot (e^{-\eta} - e^{-2\eta}) + \frac{1}{k^6} \left[\left(-\frac{1}{4}\eta - \frac{59}{144} \right) e^{-\eta} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2}\eta + \frac{7}{24} \right) e^{-2\eta} + \frac{1}{8} e^{-3\eta} - \frac{1}{144} e^{-4\eta} \right] + \\ + \frac{1}{k^{10}} \left[\left(\frac{1}{16}\eta^2 + \frac{319}{576}\eta + \frac{28369}{34560} \right) e^{-\eta} + \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{95}{96}\eta - \frac{197}{384} \right) e^{-2\eta} + \left(-\frac{3}{16}\eta - \frac{173}{576} \right) e^{-3\eta} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{72}\eta - \frac{11}{864} \right) e^{-4\eta} + \frac{13}{2304} e^{-5\eta} - \frac{7}{17280} e^{-6\eta} \right] + O\left(\frac{1}{k^{14}}\right), \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} G = e^{-\eta} + \frac{1}{k^4} \left[\frac{1}{12} e^{-\eta} - \frac{1}{2}\eta e^{-\eta} - \frac{1}{12} e^{-3\eta} \right] + \\ + \frac{1}{k^8} \left[\left(\frac{1}{8}\eta^2 + \frac{21}{32}\eta - \frac{173}{1152} \right) e^{-\eta} + \frac{1}{8} (1 + \eta) e^{-3\eta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{36} e^{-4\eta} - \frac{1}{384} e^{-5\eta} \right] + O\left(\frac{1}{k^{12}}\right), \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} H = -k + \frac{1}{k^3} \left(-\frac{1}{2} + e^{-\eta} - \frac{1}{2} e^{-2\eta} \right) + \frac{1}{k^7} \left[\frac{201}{288} + \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{2}\eta - \frac{95}{72} \right) e^{-\eta} + \left(\frac{1}{2}\eta + \frac{13}{24} \right) e^{-2\eta} + \frac{1}{12} e^{-3\eta} - \frac{1}{288} e^{-4\eta} \right] + \\ + \frac{1}{k^{11}} \left[-\frac{21023}{12960} + \left(\frac{1}{8}\eta^2 + \frac{391}{288}\eta + \frac{51829}{17280} \right) e^{-\eta} + \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{119}{96}\eta - \frac{145}{128} \right) e^{-2\eta} + \left(-\frac{1}{8}\eta - \frac{209}{864} \right) e^{-3\eta} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{144}\eta - \frac{1}{216} \right) e^{-4\eta} + \frac{13}{5760} e^{-5\eta} - \frac{7}{51840} e^{-6\eta} \right] + O\left(\frac{1}{k^{15}}\right), \end{aligned} \quad (2.65)$$

где знак $O\left(\frac{1}{k^n}\right)$ обозначает бесконечно малую величину порядка $\frac{1}{k^n}$.

Для малых чисел k можно применить метод Кокрэна (см. § 4). Вблизи $\zeta = 0$ функции F, G, H представляются в виде степенных рядов:

$$\begin{aligned} F &= a_1 \zeta + \dots, \\ G &= 1 + b_1 \zeta + \dots, \\ H &= -k - a_1 \zeta^2 + \dots, \end{aligned}$$

а для больших значений ζ используются их асимптотические представления:

$$\begin{aligned} F &\sim Ae^{-c\zeta} + \dots, \\ G &\sim Be^{-c\zeta} + \dots, \\ H &\sim -c + \left(\frac{2A}{c}\right) e^{-c\zeta} + \dots \end{aligned}$$

Эти представления затем сращиваются и находятся неизвестные постоянные.

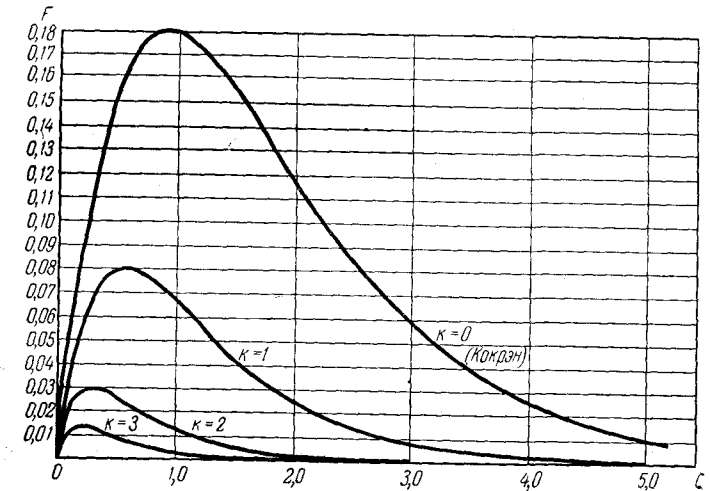


Рис. 8. Распределение радиальных скоростей около вращающегося диска при равномерном отсосе (по Стюарту).

Для значения $k = 1$ численно были определены их значения:

$$a_1 = 0,389; \quad b_1 = -1,175; \quad A = 0,334; \quad B = 1,034; \quad c = 1,259.$$

Графики изменения величин F и G вблизи диска приведены на рис. 8 и 9.

Вычислим некоторые характерные толщины пограничного слоя на вращающемся диске, определяемые по окружной

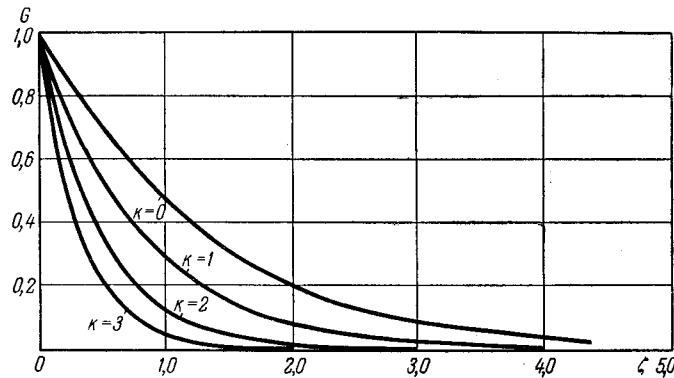


Рис. 9. Распределение окружных скоростей около вращающегося диска при равномерном отсосе (по Стюарту).

составляющей скорости вблизи диска:

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(\frac{v_{\varphi}}{r\omega} \right) dz = \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} G d\zeta, \quad (2.66)$$

$$\delta^{**} = \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} G(1-G) d\zeta, \quad (2.67)$$

и их отношение

$$H^* = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}. \quad (2.68)$$

Подставив значение G по формуле (2.64), получим после выполнения интегрирования для больших значений k :

$$\left(\frac{\omega}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \delta^* = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{4}{9k^4} + \frac{589}{720k^8} + \dots \right), \quad (2.69)$$

$$\left(\frac{\omega}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \delta^{**} = \frac{1}{2k} \left(1 - \frac{5}{12k^4} + \dots \right), \quad (2.70)$$

$$H^* = 2 \left(1 - \frac{1}{36k^4} + \dots \right), \quad (2.71)$$

Результаты вычислений этих величин приведены в таблице 3. В ней даны значения

$$H_{\infty} = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} H \quad \text{и} \quad \Phi_{\infty} = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{F}{G},$$

а также F_{\max} .

Таблица 3

Характерные постоянные для течения около вращающегося диска при равномерном отсосе с поверхности диска (по Стюарту)

k	0	1	2	3	4	∞
$\delta^* \left(\frac{\omega}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}}$	1,271	0,811	0,488	0,331	0,250	0
$\delta^{**} \left(\frac{\omega}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}}$	0,599	0,401	0,244	0,166	0,125	0
H^*	2,122	2,022	2	2	2	2
$F_{\max} - H_{\infty}$	0,181	0,080	0,0295	0,0136	0,0078	0
$-(H_{\infty} + k)$	0,886	1,259	2,057	3,019	4,008	0
Φ_{∞}	37° 42'	17° 54'	6° 47'	3° 10'	1° 48'	0

Заметим, что величины H_{∞} для больших значений k вычисляются по формуле

$$H_{\infty} = -k - \frac{1}{2} k^{-3} + \frac{201}{288} k^{-7} - \frac{21023}{12960} k^{-11} + \dots \quad (2.72)$$

Интересно, что если построить профили скоростей в отношении абсциссы z/δ^* , то практически значения $G\left(\frac{z}{\delta^*}\right)$ совпадают для всех значений k (рис. 10). Значения $F\left(\frac{z}{\delta^*}\right)$ имеют максимум в одной и той же точке $\frac{z}{\delta^*}$, и характер кривых $F\left(\frac{z}{\delta^*}\right)$ отличается лишь масштабом по оси ординат.

(рис. 11). Таким образом, все кривые можно приблизительно представить в виде формул:

$$\left. \begin{aligned} F &= A \left(e^{-\frac{z}{\delta^*}} - e^{-2\frac{z}{\delta^*}} \right), \\ G &= e^{-\frac{z}{\delta^*}}, \\ A &= 4F_{\max} \end{aligned} \right\} \quad (2.73)$$

Для оценки изменения момента трения и радиальной составляющей напряжения трения вычислим производные $F'(0)$,

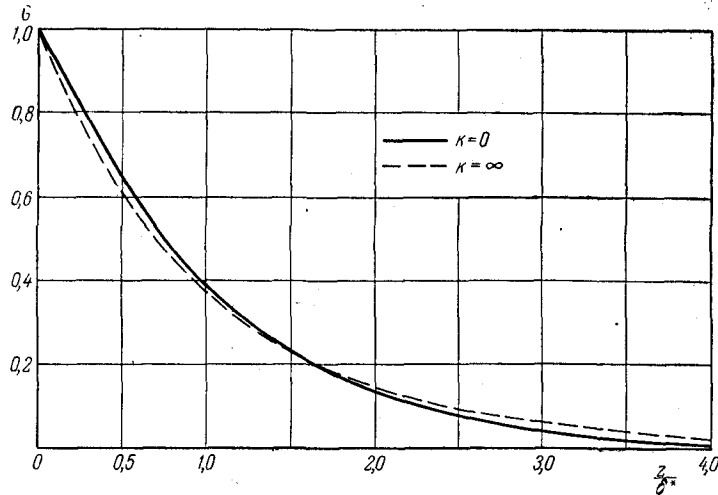


Рис. 10. Значения безразмерной окружной скорости G в зависимости от безразмерного расстояния $\mu = z/\delta^*$ (по Стюарту).

$G'(0)$. Из формул (2.63), (2.64) для больших значений k получим:

$$\left. \begin{aligned} F'(0) &= \frac{1}{2} k^{-1} - \frac{13}{48} k^{-5} + \frac{451}{864} k^{-9} + \dots, \\ G'(0) &= -k - \frac{1}{3} k^{-3} + \frac{11}{24} k^{-7} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

Числовые значения этих величин для разных значений k приведены в таблице 4.

Таблица 4

Значения величин $F'(0)$ и $-G'(0)$ для различной интенсивности отсоса с поверхности диска

k	0	1	2	3	4	∞
$F'(0)$	0,510	0,389	0,249	0,167	0,125	0
$-G'(0)$	0,616	1,175	2,041	3,012	4,005	∞

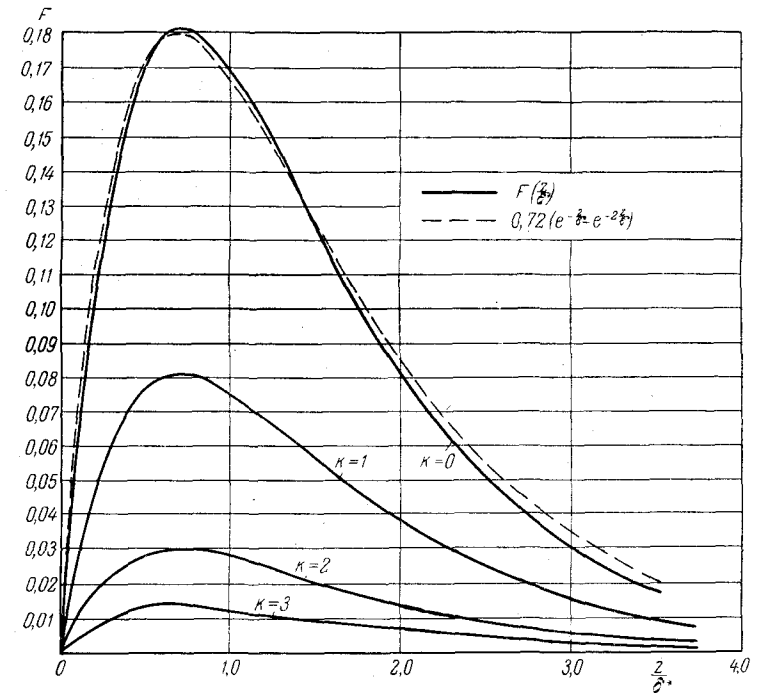


Рис. 11. Значения безразмерной радиальной скорости F в зависимости от безразмерного расстояния $\mu = z/\delta^*$ (по Стюарту).

Отсюда следует, что отсос увеличивает момент трения вращающегося диска, уменьшая в то же время радиальную составляющую напряжения трения.

§ 9. Течение вокруг диска при внезапном разгоне и остановке

Рассмотрим задачи нестационарного течения вокруг вращающегося диска: течение при внезапном приведении диска во вращательное движение с угловой скоростью ω , а также задачу о внезапной остановке вращающегося диска¹⁾.

а) Случай внезапного разгона. Как и в случае задачи о внезапном приведении в движение пластинки, следуя Блазиусу²⁾, вводим замену переменных:

$$\eta = \frac{z}{2\sqrt{\nu t}}. \quad (2.75)$$

Величины безразмерных скоростей $F = \frac{v_r}{r\omega}$, $G = \frac{v_\varphi}{r\omega}$, как и для установившегося течения вокруг диска (§ 4), можем полагать независимыми от r и разыскивать их в виде рядов:

$$G - 1 = f_0(\eta) + (\omega t)^2 f_2(\eta) + \dots \quad (2.76)$$

$$F = \omega t f_1(\eta) + (\omega t)^3 f_3(\eta) + \dots \quad (2.77)$$

Заметим, что $G_1 = G - 1$ есть безразмерная окружная скорость среды относительно диска.

Граничные условия задачи имеют следующий вид:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } z=0 \quad v_r = v_z = 0, \quad v_\varphi = r\omega, \\ \text{при } z=\infty \quad v_r = v_\varphi = 0. \end{array} \right\} \quad (2.78)$$

Член $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$ в уравнениях (1.1) отпадает, так как основная масса жидкости остается неподвижной и давление постоянно. Подставив (2.76) и (2.77) в уравнения (1.1), заметим, что, ограничиваясь первыми членами разложения по степеням ωt , получим уравнение

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2}. \quad (2.79)$$

¹⁾ Thiriot K. H., Über die laminare Anlaufströmung einer Flüssigkeit über einem rotierenden Boden bei plötzlichen Änderung des Drehzustandes, ZAMM, т. 20, 1940.

²⁾ Blasius H., Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, Z. Math. u. Physik, т. 56, 1908.

Это есть известное уравнение распространения тепла, решение которого имеет вид:

$$f_0 = \text{const} \cdot \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta.$$

Исходя из граничного условия $v_\varphi = 0$ при $z = \infty$, получим, что постоянная равна $-\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, откуда

$$G_1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta. \quad (2.80)$$

Для первого приближения компоненты v_r получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$f_1'' + 2\eta f_1' - 4f_1 = -\frac{16}{\pi} \left\{ \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 + \frac{16}{\pi} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta - 4. \quad (2.81)$$

Общий интеграл однородного уравнения имеет вид:

$$f_1^{(1)} = \alpha(2\eta^2 + 1) + \beta \left[\eta e^{-\eta^2} + (2\eta^2 + 1) \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \right],$$

где α и β — постоянные интегрирования. Пользуясь далее методом вариации постоянных, Тириот находит следующее решение дифференциального уравнения (2.81) при заданных граничных условиях:

$$\begin{aligned} f_1 = & \frac{8}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{\pi}\right) \eta^2 \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{\pi}\right) \eta e^{-\eta^2} - \\ & - \frac{4}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta - \frac{8}{\pi} \eta e^{-\eta^2} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta - \frac{8}{\pi} \eta^2 \left\{ \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 - \\ & - \frac{2}{\pi} e^{-2\eta^2} + 2\eta^2 \left(\frac{2}{\pi} - 1\right) + \frac{2}{\pi}. \quad (2.82) \end{aligned}$$

Величина v_z находится из уравнения неразрывности

$$v_z = -4\omega^2 t \sqrt{\nu t} \int_0^\eta f_1(\eta) d\eta = -4\omega^2 t \sqrt{\nu t} f_1^*(\eta). \quad (2.83)$$

Найдена также функция $f_2(\eta)$. Значения всех найденных функций приведены в таблице 5 и на рис. 12.

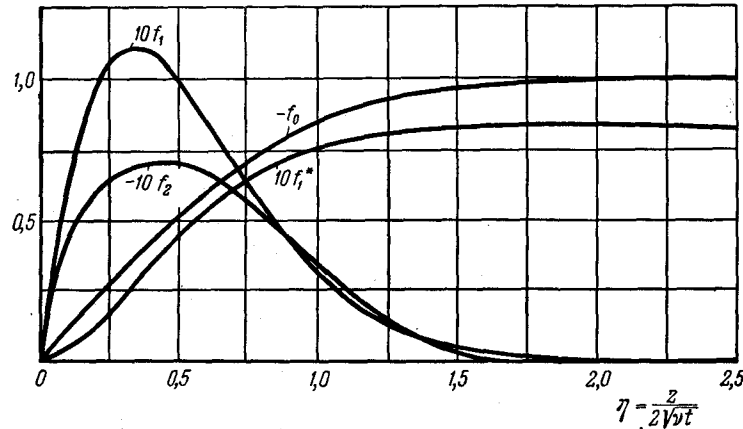


Рис. 12. Значения функций f_0 , f_1 , f_1^* и f_2 при внезапном разгоне (по Тирриоту).

б) Случай внезапной остановки. Пусть вначале диск вращается совместно с жидкостью с угловой скоростью ω , а затем его внезапно остановили.

Граничные условия задачи после остановки приобретут вид:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } z=0 \quad v_r = v_\varphi = v_z = 0, \\ \text{при } z=\infty \quad v_r = 0, \quad v_\varphi = r\omega. \end{array} \right\} \quad (2.84)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае уже $\frac{\partial p}{\partial r} \neq 0$, а именно, согласно тому, что $v_\varphi = r\omega$, $v_r = 0$, будет $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \omega^2 r$.

Решение разыскиваем в виде

$$\begin{aligned} G &= f_0(\eta) + (\omega t)^2 f_2(\eta) + \dots, \\ F &= \omega t f_1(\eta) + (\omega t)^3 f_3(\eta) + \dots \end{aligned}$$

Значения функций f_0 , f_1 , f_1^* и f_2 для случая внезапного приведения диска во вращательное движение (по Тирриоту)

$\eta = \frac{z}{2\sqrt{\nu t}}$	f_0	f_1	f_1^*	f_2
0,05	-0,056	+0,0362	+0,0009	
0,1	-0,113	+0,0639	+0,0035	-0,0236
0,2	-0,223	+0,0975	+0,0118	-0,0437
0,3	-0,329	+0,1099	+0,0219	-0,0586
0,4	-0,428	+0,1084	+0,0333	-0,0675
0,5	-0,521	+0,0984	+0,0436	-0,0716
0,6	-0,604	+0,0846	+0,0529	-0,0705
0,7	-0,678	+0,0692	+0,0606	-0,0675
0,8	-0,742	+0,0547	+0,0667	-0,0600
0,9	-0,797	+0,0418	+0,0716	-0,0587
1,0	-0,843	+0,0311	+0,0752	-0,0433
1,1	-0,880	+0,0225	+0,0778	-0,0370
1,2	-0,910	+0,0158	+0,0797	-0,0259
1,3	-0,934	+0,0110	+0,0811	-0,0217
1,4	-0,952	+0,0077	+0,0820	-0,0104
1,5	-0,966	+0,0049	+0,0825	-0,0093
1,6	-0,976	+0,0028	+0,0827	-0,0
1,7	-0,984	+0,0022	+0,0831	-0
1,8	-0,989	+0,0015	+0,0834	-0
1,9	-0,993	+0,0009	+0,0835	-0
2,0	-0,995	+0,0004	+0,0836	-0
2,1	-0,997	+0,0002	+0,0836	-0
2,2	-0,998	+0	+0,0836	-0
2,3	-0,999	+0	+0,0836	-0
2,4	-0,999	+0	+0,0836	-0
2,5	-1,000	+0	+0,0836	-0
2,6	-1,000	+0	+0,0836	-0

Для члена $f_0(\eta)$ опять получим уравнение (2.79) и решение будет иметь вид:

$$f_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta. \quad (2.85)$$

Член f_1 будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$f_1'' + 2\eta f_1' - 4f_1 = 4 - \frac{16}{\pi} \left\{ \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2,$$

решение которого, по Тириоту, имеет вид:

$$f_1 = -\frac{8}{\pi} \eta^2 \left\{ \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 - \frac{8}{\pi^{\frac{3}{2}}} \eta^2 \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta -$$

$$-\frac{4}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta - \frac{8}{\pi} \eta e^{-\eta^2} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta - \frac{2}{\pi} e^{-2\eta^2} -$$

$$-\frac{4}{\pi^{\frac{3}{2}}} \eta e^{-\eta^2} + 2\eta^2 \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) + \frac{2}{\pi}. \quad (2.86)$$

Составляющая v_z находится по уравнению неразрывности

$$v_z = -4\omega^2 t \sqrt{vt} \int_0^\eta f_1(\eta) d\eta = -4\omega^2 t \sqrt{vt} f_1^*(\eta). \quad (2.87)$$

Тириот находит также второе приближение, определяя функцию f_2 . Значения функций f_0, f_1, f_2, f_1^* приводятся на рис. 13 и в таблице 6.

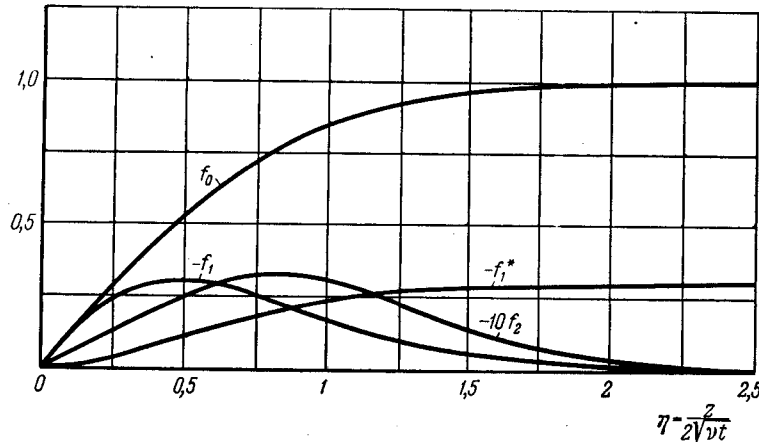


Рис. 13. Значения функций f_0, f_1, f_1^*, f_2 при внезапной остановке (по Тириоту).

Теперь можем для обоих случаев вычислить относительные линии тока. Для случая внезапного разгона они

Таблица 6

Значения функций f_0, f_1, f_1^* и f_2 для случая внезапной остановки вращающегося диска (по Тириоту)

$\eta = \frac{z}{2\sqrt{vt}}$	f_0	f_1	f_1^*	f_2
0,05	+0,056	-0,0669	-0,0017	
0,1	+0,113	-0,1240	-0,0065	-0,0046
0,2	+0,223	-0,2118	-0,0236	-0,0096
0,3	+0,329	-0,2672	-0,0478	-0,0150
0,4	+0,428	-0,2950	-0,0761	-0,0196
0,5	+0,521	-0,3009	-0,1061	-0,0242
0,6	+0,604	-0,2897	-0,1357	-0,0280
0,7	+0,678	-0,2671	-0,1636	-0,0304
0,8	+0,742	-0,2371	-0,1889	-0,0316
0,9	+0,797	-0,2038	-0,2109	-0,0312
1,0	+0,843	-0,1699	-0,2296	-0,0297
1,1	+0,880	-0,1380	-0,2450	-0,0270
1,2	+0,910	-0,1090	-0,2573	-0,0240
1,3	+0,934	-0,0842	-0,2669	-0,0202
1,4	+0,952	-0,0633	-0,2743	-0,0169
1,5	+0,966	-0,0467	-0,2798	-0,0136
1,6	+0,976	-0,0336	-0,2838	-0,0110
1,7	+0,984	-0,0238	-0,2868	-0,0079
1,8	+0,989	-0,0164	-0,2887	-0,0064
1,9	+0,993	-0,0110	-0,2900	-0,0039
2,0	+0,995	-0,0075	-0,2909	-0,0034
2,1	+0,997	-0,0047	-0,2915	-0,0014
2,2	+0,998	-0,0030	-0,2919	-0
2,3	+0,999	-0,0019	-0,2921	-0
2,4	+0,999	-0,0014	-0,2922	-0
2,5	+1,000	-0,0008	-0,2923	-0
2,6	+1,000	-0	-0,2923	-0

определяются из дифференциального уравнения

$$\frac{dr}{r d\varphi} = \frac{F}{G-1} = m. \quad (2.88)$$

Так как правая часть не зависит от r , то, следовательно, линии тока представляются логарифмическими спиралями

$$r = e^{m\varphi} \quad (2.89)$$

с коэффициентом наклона m . Значения m , подсчитанные приближенно, даны на рис. 14. При этом для случая $\eta \rightarrow 0$ получается, по Тириоту,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{F}{G-1} = -\frac{0,72676\omega t}{1 + 0,23(\omega t)^2}.$$

Величину m для $\eta = 0$ Тириот определял также экспериментально, фотографируя линии тока с использованием кристалликов красящего вещества. Опытные значения m при

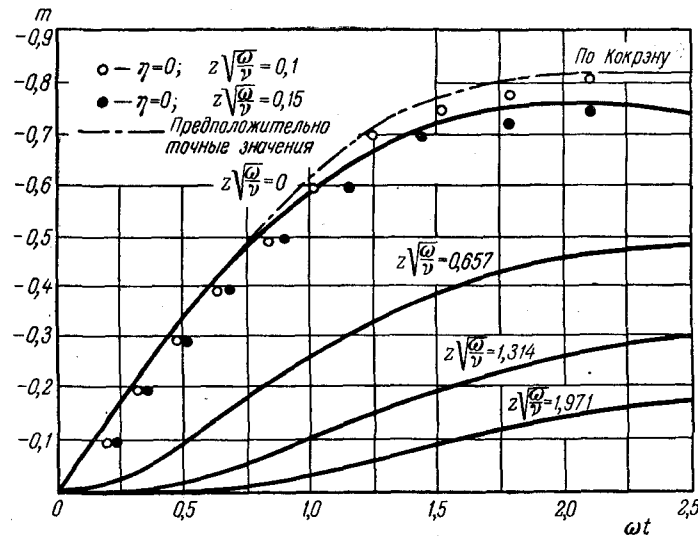


Рис. 14. Коэффициент наклона m относительных линий тока при внезапном разгоне (по Тириоту).

$\eta = 0$ хорошо согласуются с вычисленными значениями (рис. 14). При больших значениях t величина m для $\eta = 0$ приближается к значению, полученному для стационарного движения диска в неподвижной среде (рис. 15).

Аналогично вычисляются значения m для случая внезапной остановки

$$m = \frac{F}{G}.$$

При $\eta = 0$ получается

$$m = -\frac{1,2372\omega t}{1 - 0,045836(\omega t)^2}.$$

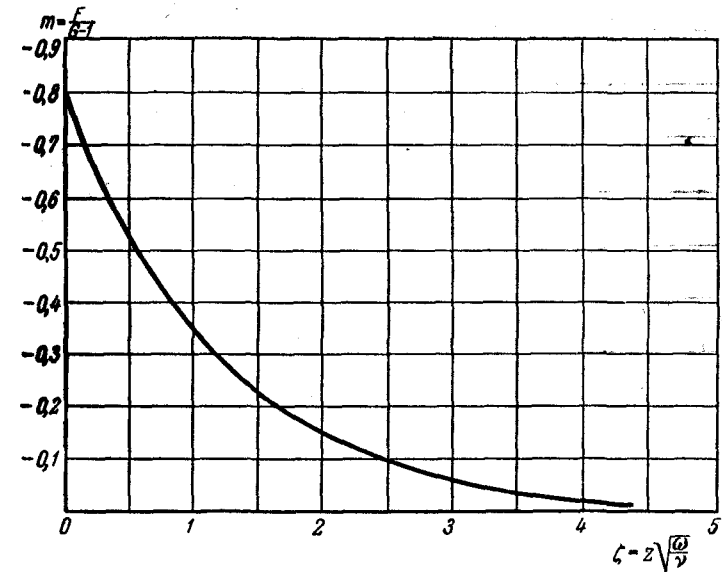


Рис. 15. Значения коэффициента наклона m относительных линий тока для стационарного движения диска в неподвижной среде.

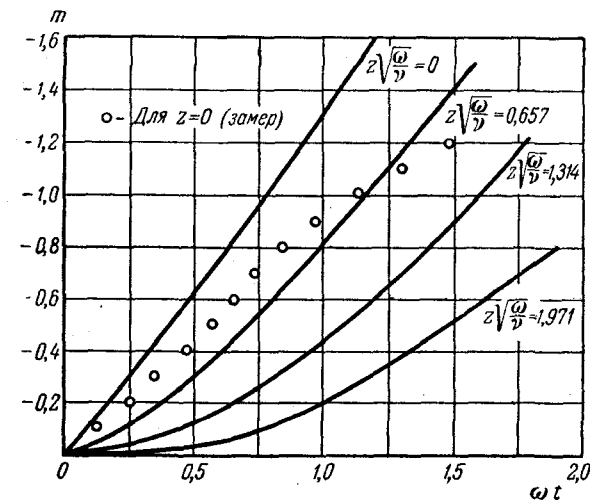


Рис. 16. Коэффициент наклона m относительных линий тока при внезапной остановке (по Тириоту).

Значения m приведены на рис. 16, где изображены также опытные величины для $z=0$. Здесь соответствие опытных и расчетных данных получается хуже, чем в случае внезапного разгона.

§ 10. Общий случай неустановившегося движения вязкой жидкости вокруг вращающегося диска при постепенном разгоне

В общем случае разгонного движения жидкости вокруг вращающегося диска граничные условия принимают вид:

$$v_r = v_z = 0, \quad v_\varphi = r\omega(t) \quad \text{при } z = 0, \quad (2.90)$$

$$v_r = v_\varphi = 0 \quad \text{при } z = \infty, \quad (2.91)$$

а начальные условия запишутся в виде

$$v_r = v_\varphi = v_z = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (2.92)$$

Тогда, если ввести подстановки

$$\left. \begin{aligned} v_r &= rf(z, t), \\ v_\varphi &= rg(z, t), \\ v_z &= 2h(z, t), \\ p &= p(z, t), \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

то система уравнений (1.1), (1.2) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \nu \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - 2h \frac{\partial f}{\partial z} - f^2 + g^2 &= \frac{\partial f}{\partial t}, \\ \nu \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} - 2h \frac{\partial g}{\partial z} - 2fg &= \frac{\partial g}{\partial t}, \\ \nu \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - 2h \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{1}{2\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial h}{\partial z} + f &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

Граничные и начальные условия представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} f = g = h = 0 & \quad \text{при } t = 0, \\ f = h = 0, \quad g = \omega(t) & \quad \text{при } z = 0, \\ f = g = 0 & \quad \text{при } z = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (2.95)$$

Для решения поставленной задачи Д. Е. Долидзе¹⁾ находит вначале решение уравнения

$$\nu \frac{\partial^2 g_0}{\partial z^2} = \frac{\partial g_0}{\partial t},$$

удовлетворяющее предельным условиям (2.95) для g . Это решение, как легко проверить, имеет вид:

$$g_0 = \frac{z}{2\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \exp\left(-\frac{z^2}{4\nu(t-\tau)}\right) \frac{\omega(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}.$$

Затем вводится функция

$$\begin{aligned} H(z, \zeta, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \exp\left[-\frac{(z-\zeta)^2}{4\nu t}\right] + \\ &+ \frac{z}{4\nu} \int_0^t \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4\nu t}\right) \exp\left[-\frac{z^2}{4\nu(t-\tau)}\right] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}, \end{aligned}$$

которая при $z \neq \zeta$ удовлетворяет уравнению

$$\nu \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (t > 0)$$

и обращается в нуль при $t=0$, а также равна нулю для $t > 0$ и $z=0$ или $z=\infty$.

С помощью функций H и g_0 , как нетрудно проверить, можно искомые функции f и g представить в виде

$$\left. \begin{aligned} f(z, t) &= \int_0^t d\tau \int_0^\infty \left(2h \frac{\partial f}{\partial \zeta} + f^2 - g^2\right) H(z, \zeta, t-\tau) d\zeta, \\ g(z, t) &= g_0(z, t) + \int_0^t d\tau \int_0^\infty \left(2h \frac{\partial g}{\partial \zeta} + 2fg\right) H(z, \zeta, t-\tau) d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (2.96)$$

¹⁾ Долидзе Д. Е., Неустановившееся движение вязкой жидкости, создаваемое вращающимся диском, Прикл. матем. и мех., т. XVIII, вып. 3, 1954.

Для решения полученной системы интегродифференциальных уравнений вводятся новые функции:

$$u = f + g, \quad w = f - g.$$

Сложением и вычитанием уравнений (2.96) получаем:

$$\left. \begin{aligned} u(z, t) &= g_0(z, t) + \\ &+ \int_0^t d\tau \int_0^\infty \left(2h \frac{\partial u}{\partial \zeta} + u\omega + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}\omega^2 \right) H(z, \zeta, t - \tau) d\zeta, \\ w(z, t) &= -g_0(z, t) + \\ &+ \int_0^t d\tau \int_0^\infty \left(2h \frac{\partial w}{\partial \zeta} + u\omega - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \right) H(z, \zeta, t - \tau) d\zeta. \end{aligned} \right\} (2.97)$$

Продифференцировав по z , отсюда получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial g_0}{\partial z} + \int_0^t d\tau \int_0^\infty \left(2h \frac{\partial u}{\partial \zeta} + u\omega + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}\omega^2 \right) \frac{\partial H}{\partial z} d\zeta, \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial g_0}{\partial z} + \int_0^t d\tau \int_0^\infty \left(2h \frac{\partial w}{\partial \zeta} + u\omega - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \right) \frac{\partial H}{\partial z} d\zeta. \end{aligned} \right\} (2.98)$$

Таким образом, получается система (2.97), (2.98) интегральных уравнений для неизвестных u , w , $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$. При этом, согласно последнему уравнению системы (2.94), h определяется из равенства

$$h = -\frac{1}{2} \int_0^z (u + w) dz. \quad (2.99)$$

Решением полученной системы определяем f , g , h , а затем из третьего уравнения (2.94) находим давление p .

Систему интегродифференциальных уравнений (2.97), (2.98) можно решать методом последовательных приближений.

Вводим обозначения

$$\frac{\partial u}{\partial z} = U, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = W$$

и вместо системы (2.97), (2.98) рассмотрим систему с параметром λ , представив искомые функции u , w , U , W , h в виде рядов:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n, \quad \dots, \quad h = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n h_n.$$

Подставив эти ряды в (2.97), (2.98), (2.99), получим для определения слагаемых рекуррентные формулы:

$$u_0 = g_0, \quad w_0 = -g_0, \quad U_0 = \frac{\partial g_0}{\partial z}, \quad W_0 = -\frac{\partial g_0}{\partial z}, \quad h_0 = 0,$$

$$u_{n+1} = \int_0^t d\tau \int_0^\infty \sum_{m=0}^n \left(2h_{n-m} U_m + u_{n-m} \omega_m + \frac{1}{2} u_{n-m} u_m - \frac{1}{2} \omega_{n-m} \omega_m \right) H d\zeta,$$

$$w_{n+1} = \int_0^t d\tau \int_0^\infty \sum_m \left(2h_{n-m} W_m + u_{n-m} \omega_m - \frac{1}{2} u_{n-m} u_m + \frac{1}{2} \omega_{n-m} \omega_m \right) H d\zeta,$$

$$U_{n+1} = \int_0^t d\tau \int_0^\infty \sum_m \left(2h_{n-m} U_m + u_{n-m} \omega_m + \frac{1}{2} u_{n-m} u_m - \frac{1}{2} \omega_{n-m} \omega_m \right) \frac{\partial H}{\partial z} d\zeta,$$

$$W_{n+1} = \int_0^t d\tau \int_0^\infty \sum_m \left(2h_{n-m} W_m + u_{n-m} \omega_m - \frac{1}{2} u_{n-m} u_m + \frac{1}{2} \omega_{n-m} \omega_m \right) \frac{\partial H}{\partial z} d\zeta,$$

$$h_{n+1} = -\frac{1}{2} \int_0^z (u_{n+1} + w_{n+1}) dz.$$

Далее в работе Д. Е. Долидзе¹⁾ показывается сходимость указанного процесса последовательных приближений. Исследуется также характер поведения v_z в бесконечности.

Заметим, что в первом приближении $f_0 = h_0 = 0$ и, согласно предыдущему:

$$v_r = v_z = 0, \quad p = p_0(t),$$

$$v_\varphi = \frac{rz}{2\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \exp\left[-\frac{z^2}{4\nu(t-\tau)}\right] \frac{\omega(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}.$$

Отсюда видно, что первым приближением можно характеризовать только вращательное движение при отсутствии эффекта центробежных сил.

Вычислим момент сил сопротивления для одной стороны диска радиуса R . Он равен

$$M_0 = 2\pi \int_0^R \mu \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} r^2 dr = -\frac{\rho R^4 \omega(t) \sqrt{\pi\nu}}{2\sqrt{t}}. \quad (2.100)$$

Во втором приближении уже появляется эффект центробежных сил, однако формула (2.100) для момента сопротивления остается неизменной.

¹⁾ См. сноску на стр. 51.

ГЛАВА III

ПЕРЕХОД ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВОКРУГ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА В ТУРБУЛЕНТНОЕ

§ 11. Общая картина явления

Еще при первых опытах по определению момента трения вращающегося диска наблюдалось характерное изменение кривой зависимости трения от числа Рейнольдса. При значениях чисел Рейнольдса $R = \frac{r^2 \omega}{\nu}$ порядка $3 \cdot 10^5$ зависимость коэффициента момента $c_M \sim R^{-0,5}$ превращается в зависимость вида $c_M \sim R^{-0,2}$. Очень четкая картина изменения c_M при переходе от ламинарного режима к турбулентному получена в опытах Теодорсена и Регира (см. рис. 3 и сноску на стр. 21).

Некоторые наблюдения явления перехода были проделаны Смитом¹⁾. Подробное исследование явления потери устойчивости ламинарного течения вблизи вращающегося диска проведено Грегори, Стюартом и Волкером²⁾. Для получения картины перехода они покрывали диск диаметром 304,5 мм и толщиной 6,35 мм, сделанный из прозрачного пластика, тонким слоем каолина. С другой стороны для контрастности диск зачернялся. При вращении диска с угловой скоростью до 3000 об/мин каолин «сметался»³⁾ потоком, давая очень характерную картину (рис. 17) появления стоячих (относительно диска) волн вихрей в зоне перехода. Полученная картина показывает, что фронт волны распространяется

¹⁾ Smith N. H., NASA TN, № 1227, 1947.

²⁾ См. сноску на стр. 19.

³⁾ О методе каолина см. П о в х И. Л., Аэродинамический эксперимент в машиностроении, Машгиз, 1959.

в направлении, составляющем угол $\varepsilon = 14^\circ$ с радиальным направлением. Заметим, что это соответствует замерам Смита. Число вихрей по окружности диска равно 28—31. Фотография «сметания» каолина указывает также начало потери устойчивости и точку перехода в турбулентный поток.

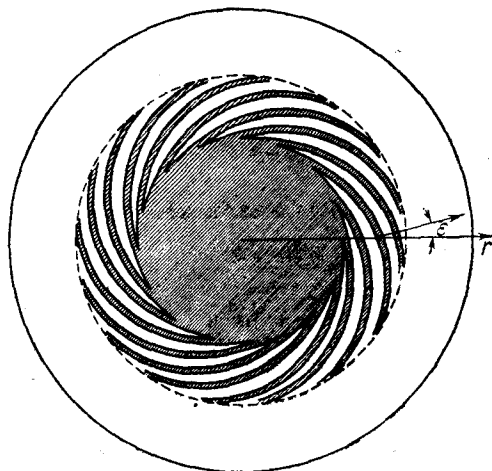


Рис. 17. Схема «сметания» каолина при вращении диска в свободном пространстве (по фотоснимку Грегори и Волкера).

Другим методом, который применили исследователи, явился акустический. С помощью акустического стетоскопа, который вводился в зону пограничного слоя вблизи диска, прослушивались звуковые явления. В ламинарной зоне наблюдалась тишина, в переходной — слышался звук определенной высоты тона вследствие быстрого прохождения завихрений возле трубки стетоскопа, в турбулентной зоне появлялся характерный турбулентный «вой». Таким путем были зафиксированы точки потери устойчивости и перехода в турбулентную зону, которые приведены в таблице 7.

Были проведены замеры на дисках двух диаметров. Как показали опыты, ни диаметр диска, ни окружная скорость сами по себе не влияют на явления перехода, а влияет число Рейнольдса $R = \frac{r^2 \omega}{\nu}$. Некоторое влияние оказывает турбу-

лентность окружающей среды, она дает разброс опытных точек. (Например, в тот день, когда воздух в помещении был более спокойным, переход наступал при $R = 2,99 \cdot 10^5$). Влияет также шероховатость поверхности диска. Так, например, Смит¹⁾, наблюдая переход с помощью термоанометра, на более тщательно отполированном диске получил $R_{кр} = 3,1 \cdot 10^5$. Теодорсен и Регир²⁾ наблюдали, что шероховатость уменьшает $R_{кр}$. Они заметили, что обдув диска тонкой струей по центру также уменьшает $R_{кр}$. Таким образом, $R_{кр}$ имеет порядок $3 \cdot 10^5$, что соответствует результатам замеров $c_M = f(R)$.

Таблица 7

Результаты замеров точки потери устойчивости и точки перехода для диска диаметром 304,5 мм (по Грегори и Волкеру)

об/мин	Начало неустойчивости		Точка перехода	
	r (мм)	$10^{-5} R$	r (мм)	$10^{-5} R$
3200	89	1,82	110,5	2,82
2900	94	1,85	115	2,77
2585	98,3	1,80	125	2,91
2200	106,7	1,81	132	2,77
1950	122,7	2,12	145,8	2,99
1700	120,4	1,78	152,2	2,85
1370 *)	137	1,86	171,5	2,90
1250 *)	152,4	2,10	177,5	2,85
600 *)	215	2,00	250	2,70

*) Диск диаметром 609 мм.

Заметим (рис. 18), что при потере устойчивости ламинарного пограничного слоя профили скоростей в пограничном слое незначительно изменяются, их существенная перестройка начинается лишь при окончательном переходе к турбулентному режиму.

1) См. сноску 1) на стр. 55.

2) См. сноску на стр. 21.

Тщательное исследование зоны неустойчивости было проведено Грегори, Стюартом и Волкером¹⁾ при помощи

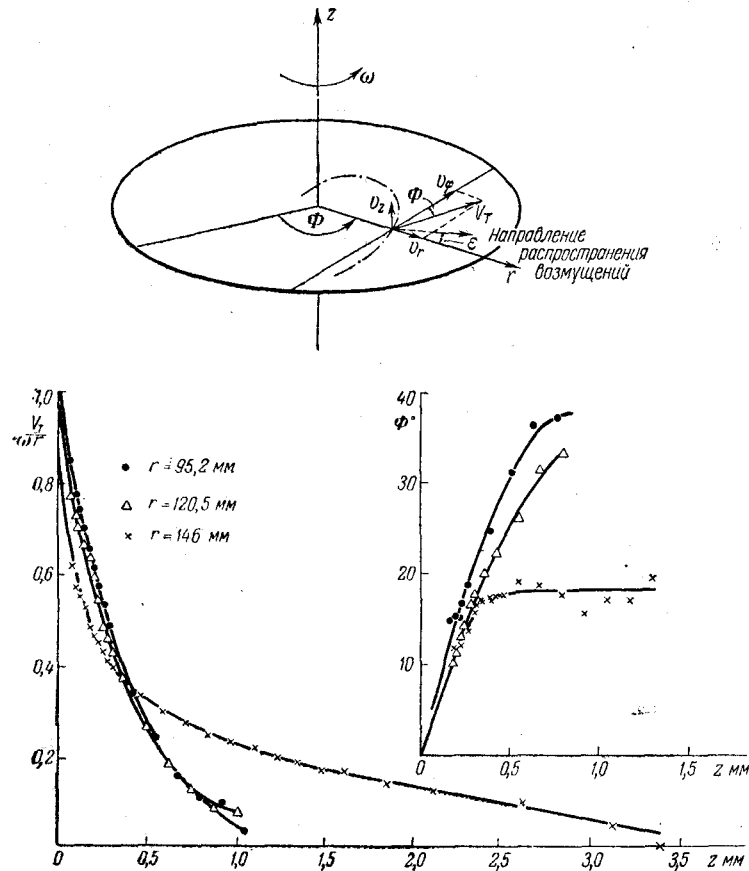


Рис. 18. Изменение профиля касательных скоростей вблизи вращающегося диска при потере устойчивости ламинарного течения, $n = 2100$ об/мин; начало потери устойчивости при $r = 105$ мм; переход к турбулентному течению при $r = 120,5$ мм (по Грегори и Волкеру).

микрофона с усилителем. Анализатор частот, связанный с усилителем, позволил получить картину колебаний в зоне

¹⁾ См. сноску на стр. 19.

потери устойчивости, которая представлена для двух чисел оборотов диска на рис. 19. Как видно, отношение частоты

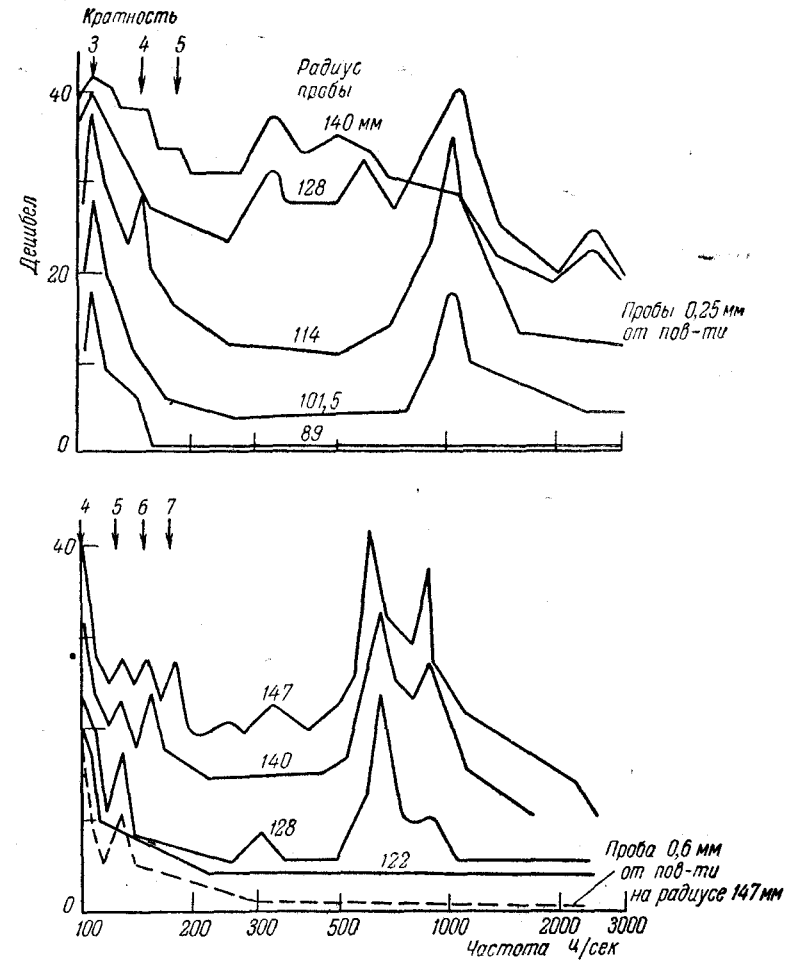


Рис. 19. Анализ частот колебаний в зоне потери устойчивости ламинарного течения вблизи вращающегося диска (по Грегори и Волкеру).

колебаний наибольшей интенсивности к частоте вращения диска равно 25—35, что соответствует сфотографированному числу стоячих волн вихрей (28—31).

В той же работе приводится математический анализ явления потери устойчивости трехмерного ламинарного течения вокруг вращающегося диска.

Рассматривая течение вблизи вращающегося диска, можем учесть, что на малом участке радиуса его можно считать плоским, а основные возмущения — направленными нормально к поверхности. Поэтому для ознакомления с постановкой вопроса и методикой решения задачи об устойчивости ламинарного течения вблизи вращающегося диска обратимся к рассмотрению плоской задачи.

§ 12. Метод малых колебаний для исследования устойчивости ламинарного течения

Рассмотрим устойчивое течение в пограничном слое у плоской поверхности, когда составляющая U скорости, параллельная плоскости, зависит только от расстояния y от плоскости $U = U(y)$, а $V \equiv 0$. Наложим на это основное движение малое двухмерное возмущающее движение, так что результирующее движение будет определяться следующими скоростями и давлением:

$$u = U + u', \quad v = v', \quad p = P + p', \quad (3.1)$$

которые должны являться решениями уравнений Навье-Стокса для плоского потока:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Подставив (3.1) в (3.2) и отбрасывая члены, квадратичные относительно возмущений, получим с учетом того, что исходное движение также удовлетворяет уравнениям Навье-Стокса, следующую систему дифференциальных уравнений

для определения возмущений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} &= \nu \Delta u', \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} &= \nu \Delta v', \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Любое возмущение можно путем разложения в ряд Фурье представить в виде суммы относительных волн, распространяющихся в направлении движения. Введя функцию тока $\psi(x, y, t)$, можем отдельное колебание представить в виде

$$\psi = \varphi(y) e^{i(\alpha x - \beta t)}, \quad (3.4)$$

так что

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \varphi'(y) e^{i(\alpha x - \beta t)}, \\ v' &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -i\alpha \varphi(y) e^{i(\alpha x - \beta t)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

где $\varphi = \varphi_r + i\varphi_i$ — комплексная амплитуда, α — действительная величина, связанная с длиной волны λ возмущения соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}, \quad (3.6)$$

$\beta = \beta_r + i\beta_i$ — комплексная величина, в которой β_r — круговая частота колебаний, β_i — коэффициент нарастания. При $\beta_i < 0$ колебание затухает, т. е. ламинарное течение устойчиво, при $\beta_i > 0$ — неустойчиво.

Введем еще величину

$$c = \frac{\beta}{\alpha} = c_r + ic_i, \quad (3.7)$$

где c_r — скорость распространения волн в направлении движения x . Подставив (3.4) и (3.5) в уравнения (3.3), исключив предварительно из первых двух уравнений давление, получим дифференциальное уравнение возмущенного движения

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi = -\frac{i\nu}{\alpha} (\varphi^{IV} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi).$$

Перейдем в этом уравнении к безразмерным величинам, разделив скорости на некоторую максимальную скорость U_m

ламинарного течения, а длины — на некоторую характерную длину δ . Тогда получим, обозначая дифференцирование по безразмерной длине y/δ штрихами, уравнение

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi = -\frac{l}{\alpha R} (\varphi^{IV} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi), \quad (3.8)$$

где $R = \frac{U_m \delta}{\nu}$ — характерное число Рейнольдса (для безразмерных скоростей сохраним те же обозначения, что и для размерных).

Исследование устойчивости ламинарного движения есть, таким образом, задача о собственных значениях c и соответствующих собственных функциях дифференциального уравнения (3.8) при заданных граничных условиях.

Так как из условий опытов известно, что предел устойчивости, при котором $\beta_i = 0$ ($c_i = 0$), лежит при больших значениях чисел Рейнольдса, то можно попытаться для упрощения исследования в первом приближении отбросить малый член в правой части, зависящий от вязкости, т. е. найти так называемую *невязкую неустойчивость* с помощью дифференциального уравнения

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi = 0. \quad (3.9)$$

В качестве граничных условий служат условия непроницаемости поверхности, а также соответствующее граничное условие в бесконечности:

$$\varphi = 0 \text{ на стенке и в бесконечности.} \quad (3.10)$$

§ 13. Вариационный метод решения задачи

Одним из способов, позволяющих легко определить собственные значения уравнения (3.9), является вариационный метод. Построим, следуя Стюарту¹⁾, соответствующую вариационную задачу.

Обозначив

$$K(\xi) = -\frac{U''}{U - c}, \quad \xi = \frac{y}{\delta},$$

представим (3.9) в виде

$$\varphi'' - \alpha^2 \varphi + K(\xi) \varphi = 0. \quad (3.11)$$

¹⁾ См. сноску на стр. 19.

Умножив это уравнение на φ и проинтегрировав с учетом (3.10), получим:

$$\alpha^2 = \frac{\int_0^\infty [K(\xi) \varphi^2 - \varphi'^2] d\xi}{\int_0^\infty \varphi^2 d\xi}. \quad (3.12)$$

Легко показать, что функция φ , дающая экстремум величины α^2 , является собственной функцией уравнения (3.11). Действительно, величина α^2 есть отношение

$$\alpha^2 = \frac{I_1}{I_2},$$

т. е. ее вариация равна

$$\delta \alpha^2 = \frac{1}{I_2} (\delta I_1 - \alpha^2 \delta I_2), \quad (3.13)$$

причем

$$\delta I_2 = 2 \int_0^\infty \varphi \delta \varphi d\xi, \quad (3.14)$$

а величина δI_1 с применением интегрирования по частям равняется

$$\begin{aligned} \delta I_1 &= 2 \int_0^\infty (\varphi K \delta \varphi - \varphi' \delta \varphi') d\xi = \\ &= 2 \int_0^\infty K \varphi \delta \varphi d\xi - 2 [\varphi' \delta \varphi]_0^\infty + 2 \int_0^\infty \varphi'' \delta \varphi d\xi, \end{aligned}$$

т. е. с учетом (3.10)

$$\delta I_1 = 2 \int_0^\infty [K(\xi) \varphi + \varphi''] \delta \varphi d\xi. \quad (3.15)$$

Подставив (3.13) и (3.14) в (3.12), получим:

$$\delta \alpha^2 = \frac{2}{I_2} \int_0^\infty (\varphi'' + K \varphi - \alpha^2 \varphi) \delta \varphi d\xi.$$

Экстремальное значение α^2 получится при $\delta\alpha^2 = 0$, т. е. при

$$\varphi'' + K\varphi - \alpha^2\varphi = 0.$$

Таким образом, решение вариационной задачи (3.12) является собственной функцией уравнения (3.11).

§ 14. Приложение к случаю вращающегося диска

В случае вращающегося диска можно представить движение в пограничном слое на некотором малом участке радиуса как плоское движение под некоторым углом наклона ε к радиальному направлению¹⁾.

Как уже указывалось, определение нейтральных колебаний сводится к определению вещественных ($c_i = 0$) собственных значений дифференциального уравнения (3.9). Если в качестве характерной максимальной скорости на малом участке радиуса взять окружную скорость $r\omega$, то безразмерная скорость U будет иметь вид:

$$U = F - (1 - G) \operatorname{tg} \varepsilon. \quad (3.16)$$

Согласно анализу дифференциального уравнения (3.9)²⁾, потеря устойчивости ламинарного течения наступает в случае, когда нулевое значение профиля скорости $U(\xi)$ совпадает с точкой перегиба профиля скоростей, т. е. с точкой, где $U''(\xi) = 0$. Пользуясь известными значениями для F и G , на основании высказанного положения легко найти, что $\varepsilon = 13^\circ 18'$. Это значение хорошо соответствует результатам экспериментов, которые дают значение $\varepsilon = 14^\circ$ (см. рис. 17).

Определим теперь число волн вихрей. Выберем в качестве характерной длины толщину вытеснения δ^* , которая для рассматриваемого случая равна (§ 8)

$$\delta^* = 1,271 \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}.$$

¹⁾ Более подробное рассмотрение трехмерного пограничного слоя вблизи вращающегося диска, проведенное Стюартом (см. сноску на стр. 19), показывает, что кроме уравнения (3.8) появляется еще одно дифференциальное уравнение для колебательных возмущений, направленных перпендикулярно к основному направлению x движения жидкости вблизи диска.

²⁾ Tollmien W., Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminaren Geschwindigkeitsverteilungen, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, Fachgruppe I, 1 (1935).

Таким образом, $\xi = \zeta : 1,271$. Вблизи $\zeta = 0$, согласно таблице 1 для значений F и G , функция $K(\xi)$ при $\varepsilon = 13^\circ 18'$ имеет вид:

$$K(\xi) = -\frac{U''}{U} = \frac{3,48}{\xi}.$$

Если обозначить

$$\eta = 1 - e^{-\xi},$$

то можно аппроксимировать K следующей функцией:

$$K(\eta) = \frac{3,48}{\eta} (1 - \eta)(1 + 0,362\eta). \quad (3.17)$$

Представим теперь искомую функцию φ в таком виде, чтобы она удовлетворяла граничным условиям

$$\varphi = \eta(1 - \eta)(1 + B\eta), \quad (3.18)$$

где B — неизвестная постоянная. Подставив (3.17) и (3.18) в (3.12), получим:

$$\alpha^2 = \frac{0,16533 + 0,17400B + 0,03665B^2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{10}B + \frac{1}{30}B^2}.$$

Максимум этой величины достигается при $B = -0,540$, что дает

$$\alpha = 1,45.$$

Второе значение B , дающее экстремум функции α^2 (минимум), непригодно, так как соответствует мнимому значению α .

Таким образом, безразмерная длина волны будет равна

$$\frac{\lambda}{\delta^*} = \frac{2\pi}{1,45},$$

а расстояние между соседними волнами в окружном направлении равно

$$\frac{2\pi}{1,45} \frac{\delta^*}{\sin \varepsilon}.$$

Поэтому число волн вихрей равно

$$N = 2\pi r : \frac{2\pi}{1,45} \frac{\delta^*}{\sin \varepsilon} = 0,262 \sqrt{\frac{r^2\omega}{\nu}}.$$

Опыты Грегори, Стюарта и Волкера (см. § 11 настоящей главы) показали, что критическое число Рейнольдса $\frac{r^2\omega}{\nu}$

равно 182 000, следовательно, $N = 112$ вместо 30, которое наблюдалось. Такое расхождение связано с влиянием отброшенных вязких членов уравнения (3.8).

Стюарт¹⁾ построил пример, когда можно вычислить форму вихрей при потере устойчивости. Для этого он

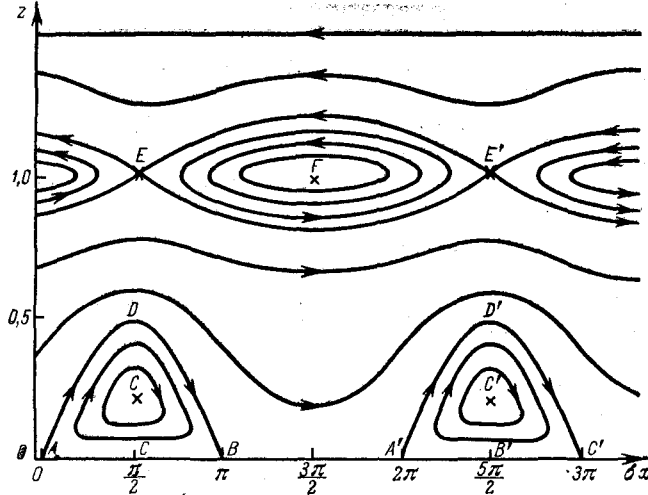


Рис. 20. Завихрения в зоне потери устойчивости ламинарного течения при вращении диска с равномерным отсосом (по Стюарту).

рассматривал решение для потока вблизи диска при большом отсосе по диску. В этом случае (§ 8)

$$F = \frac{1}{2k^2} (e^{-\xi} - e^{-2\xi}),$$

$$G = e^{-\xi},$$

и профиль скоростей U примет вид:

$$U = -\operatorname{tg} \varepsilon + (A + \operatorname{tg} \varepsilon) e^{-\xi} - A e^{-2\xi}, \quad A = \frac{1}{2} k^{-2}.$$

Направление ε , определяемое совмещением корней U и U'' , дает

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{3} A.$$

¹⁾ См. сноску на стр. 19.

Тогда нетрудно найти, что

$$K(\xi) = \frac{4}{e^{\xi} - 1},$$

дифференциальное уравнение (3.11) принимает вид:

$$\varphi'' - \alpha^2 \varphi + \frac{4\varphi}{e^{\xi} - 1} = 0.$$

Это уравнение имеет точное решение

$$\varphi = e^{-\frac{3}{2}\xi} - e^{-\frac{5}{2}\xi}$$

с собственным значением $\alpha = \frac{3}{2}$.

Заметим, что если решать вариационную задачу, задав φ в виде (3.18), то получим значение $\alpha = \sqrt[4]{5} \approx 1,495$, которое отличается от точного на $\frac{1}{3}\%$. Замечательно также, что это значение близко к тому, которое получено в случае отсутствия отсоса, т. е. отсос не оказывает влияния на собственное значение α .

Пользуясь явными выражениями для скоростей, Стюарту удалось решить уравнения для невязких трехмерных возмущений и найти форму линий тока, которые указывают на существование двух видов вихревых волн вблизи вращающегося диска (рис. 20).

ГЛАВА IV
ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВОКРУГ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ
В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДИСКА

§ 15. Интегральные соотношения пограничного слоя
на вращающемся диске

Для расчета турбулентного пограничного слоя на вращающемся диске применим интегральные методы и полуэмпирические зависимости, полученные при изучении течений в трубах и на пластинке.

Рассмотрим кольцевой элемент пограничного слоя толщины δ на вращающемся диске, расположенный между радиусами r и $r + dr$. Приращение количества движения в радиальном направлении для рассматриваемого элемента равно

$$\frac{d}{dr} \left(2\pi r \rho \int_0^{\delta} v_r^2 dz \right) dr.$$

Центробежная сила, действующая на рассматриваемый элемент, будет выражаться величиной

$$-2\pi r \left(\rho \int_0^{\delta} \frac{v_{\varphi}^2}{r} dz \right) dr.$$

Результирующая двух рассмотренных выше сил уравновешивается силой трения $2\pi r \tau_r dr$, где τ_r — радиальная компонента напряжения. Поэтому будем иметь:

$$\frac{d}{dr} \left(r \int_0^{\delta} v_r^2 dz \right) - \int_0^{\delta} v_{\varphi}^2 dz = -r \frac{\tau_r}{\rho}. \quad (4.1)$$

Второе уравнение получим, если вычислим приращение момента количества движения относительно оси вращения в окружном направлении:

$$\frac{d}{dr} \left(2\pi r^2 \rho \int_0^{\delta} v_r v_{\varphi} dz \right) dr,$$

которое должно уравновешиваться моментом сил трения в окружном направлении $-2\pi r^2 \tau_{\varphi} dr$, так что

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \int_0^{\delta} v_r v_{\varphi} dz \right) = -\frac{\tau_{\varphi} r^2}{\rho}. \quad (4.2)$$

Заметим, что полученные интегральные соотношения можно было вывести непосредственно из уравнений движения в пограничном слое вращающегося диска¹⁾.

§ 16. Решение Кармана для степенного профиля
скоростей

Для определения сопротивления вращающегося диска в турбулентном потоке Карман²⁾ использовал интегральные соотношения (4.1), (4.2), приняв степенной закон для распределения скоростей в пограничном слое со степенью $1/7$, который наблюдался при течении в трубах в определенной зоне чисел Рейнольдса. Он полагает:

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \alpha r \omega \left(\frac{z}{\delta} \right)^{1/7} \left(1 - \frac{z}{\delta} \right), \\ v_{\varphi} &= r \omega \left[1 - \left(\frac{z}{\delta} \right)^{1/7} \right], \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

где α и δ — неизвестные величины. Профили радиальных и окружных скоростей удовлетворяют граничным условиям на стенке

$$z = 0: \quad v_r = 0, \quad v_{\varphi} = r\omega$$

¹⁾ Лойцянский Л. Г., Аэродинамика пограничного слоя, Гостехиздат, 1941.

²⁾ См. сноску на стр. 15.

и на внешней границе пограничного слоя

$$z = \delta: v_r = v_\varphi = 0.$$

Заметим, что вблизи диска ($z \rightarrow 0$)

$$\frac{v_r}{r\omega} = \alpha \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}, \quad \frac{v_\varphi - r\omega}{r\omega} = -\left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}.$$

т. е. α представляет собой отношение между радиальной и окружной составляющими относительной скорости в пограничном слое и, стало быть, отношение между соответствующими составляющими напряжения трения

$$\tau_r = -\alpha\tau_\varphi. \quad (4.4)$$

Результирующая относительная скорость u среды вблизи поверхности диска получится равной

$$u = \sqrt{v_r^2 + (v_\varphi - r\omega)^2} = (1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} r\omega. \quad (4.5)$$

Используя эмпирический закон « $1/7$ » для трубы

$$\frac{u}{v_*} = 8,74 \left(\frac{v_* z}{v}\right)^{\frac{1}{7}},$$

где $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$, получим из него, подставляя $u = U$ при $z = \delta$, соотношение

$$\tau_0 = 0,0225\rho U^2 \left(\frac{v}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}}. \quad (4.6)$$

Используя соотношения (4.4)—(4.6), получим для составляющих напряжения трения:

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= 0,0225\rho\alpha^{\frac{7}{4}} (r\omega)^{\frac{7}{4}} \left(\frac{v}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \left[1 + \frac{1}{\alpha^2}\right]^{\frac{3}{8}}, \\ \tau_\varphi &= -0,0225\rho (r\omega)^{\frac{7}{4}} \left(\frac{v}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \left[1 + \alpha^2\right]^{\frac{3}{8}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.6')$$

Вычислим затем интегралы, стоящие в уравнениях (4.1) и (4.2) с учетом (4.3):

$$\int_0^\delta v_r^2 dz = 0,207\alpha^2 (r\omega)^2 \delta,$$

$$\int_0^\delta v_r v_\varphi dz = 0,0681 (r\omega)^2 \alpha \delta,$$

$$\int_0^\delta v_\varphi^2 dz = 0,0278 (r\omega)^2 \delta.$$

Подставляя эти значения в уравнения (4.1) и (4.2), а также используя (4.6'), получим уравнения для определения величин α и δ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} (0,207r^2\omega^2\alpha^2\delta) - 0,0278r^2\omega^2\delta &= \\ &= -0,0225\alpha^2 r^3\omega^2 \left(\frac{v}{ar\omega\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^{\frac{3}{8}}, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dr} (0,0681r^4\omega^2\alpha\delta) = 0,0225r^4\omega^2 \left(\frac{v}{r\omega\delta}\right)^{\frac{1}{4}} (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{8}}.$$

Положив, далее,

$$\delta = \beta r^{\frac{3}{5}}, \quad (4.7)$$

получим систему алгебраических уравнений относительно α и β :

$$0,7456\alpha^2\beta - 0,0278\beta = -0,0225\alpha^2 \left(\frac{v}{\alpha\beta\omega}\right)^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^{\frac{3}{8}},$$

$$0,3133\alpha\beta = 0,0225 \left(\frac{v}{\beta\omega}\right)^{\frac{1}{4}} (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{8}}.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим:

$$1,0859\alpha^2 - 0,0278 = 0,$$

откуда

$$\alpha = 0,162,$$

Соответствующее значение β получится равным

$$\beta = 0,525 \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^{\frac{1}{5}},$$

так что толщина пограничного слоя будет

$$\delta = 0,525r \left(\frac{\nu}{r^2\omega} \right)^{\frac{1}{5}}. \quad (4.8)$$

Для составляющих местного коэффициента трения будем иметь следующие выражения:

$$\frac{\tau_\varphi}{\rho(r\omega)^2} = - \frac{\tau_r}{a\rho(r\omega)^2} = 0,0267R^{-0,2}, \quad (4.9)$$

если под величиной R понимать, как и ранее,

$$R = \frac{r^2\omega}{\nu}.$$

Вычислим момент сопротивления одной стороны диска радиуса R :

$$M = 2\pi R^2 \rho \int_0^\delta \nu_r \nu_\varphi dz = 0,0364 R^5 \omega^2 \rho \left(\frac{\nu}{R^2 \omega} \right)^{\frac{1}{5}},$$

так что коэффициент момента сопротивления [определяемый формулой (2.15)] получится равным

$$c_M = 0,146 R^{-0,2}. \quad (4.10)$$

Полученный результат хорошо согласуется с опытными данными (рис. 3). Однако для больших значений чисел R он дает несколько меньшие значения, чем опытные. По-видимому, лучшее согласование с результатами опытов можно получить, если применять для разных значений R , $\beta = \frac{r\omega\delta}{\nu}$ несколько иные степени (не равные $1/5$) для профиля скоростей в пограничном слое.

Заметим, что для количества жидкости, притекающей к диску радиуса R в осевом направлении, получаем:

$$Q = 2\pi R \int_0^\infty \nu_r dz = 0,219 R^3 \omega R^{-0,2}, \quad (4.11)$$

§ 17. Применение логарифмического профиля скоростей

Для получения лучшего согласования с опытными данными С. Гольдштейн¹⁾ использовал для расчета сопротивления универсальный (не зависящий от числа R) логарифмический профиль скоростей в пограничном слое

$$\frac{u}{v_*} = A \ln \frac{v_* z}{\nu} + B, \quad A = 2,5, \quad B = 5,5, \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}. \quad (4.12)$$

Как и выше, обозначим через α отношение радиальной к окружной составляющей относительной скорости внутри пограничного слоя:

$$\alpha = \frac{\nu_r}{r\omega - v_\varphi} = - \frac{\tau_r}{\tau_\varphi}. \quad (4.13)$$

Тогда

$$\tau_r = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \tau_0, \quad \tau_\varphi = - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \tau_0, \quad (4.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \nu_r &= \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} u, & r\omega - v_\varphi &= \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} u, \\ u &= \sqrt{\nu_r^2 + (v_\varphi - r\omega)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

На внешней границе пограничного слоя $v_\varphi|_{z=\delta} = 0$, поэтому, согласно (4.15):

$$U = u|_{z=\delta} = \sqrt{1+\alpha^2} r\omega, \quad (4.16)$$

и с учетом (4.12)

$$v_\varphi = r\omega - \frac{u}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{U-u}{\sqrt{1+\alpha^2}} = - \frac{A v_*}{\sqrt{1+\alpha^2}} \ln \frac{z}{\delta}. \quad (4.17)$$

Радиальная составляющая ν_r вблизи стенки согласно (4.13) будет тогда равна

$$\nu_r = \alpha r\omega + \frac{A \alpha v_*}{\sqrt{1+\alpha^2}} \ln \frac{z}{\delta} \quad \text{при } z \leq z_1 < \delta. \quad (4.18)$$

¹⁾ Goldstein S., On the resistance to the rotation of a disc immersed in a fluid, Proc. Cambr. Phil. Soc; т. 31, 1935.

Для того чтобы эта составляющая превращалась в нуль на внешней границе пограничного слоя, Гольдштейн полагает в области $z_1 \leq z \leq \delta$

$$v_r = -\frac{A\alpha v_*}{\sqrt{1+\alpha^2}} \ln \frac{z}{\delta}, \quad (4.19)$$

причем из условия смыкания (4.18) и (4.19) в точке $z = z_1$

$$\frac{2Av_*}{\sqrt{1+\alpha^2}} \ln \frac{z_1}{\delta} = -r\omega.$$

Обозначив

$$Y = \frac{U}{Av_*} = \ln \frac{v_* \delta}{v} + \frac{B}{A} = \ln \frac{U\delta}{v} - \ln AY + \frac{B}{A}, \quad (4.20)$$

найдем следующие формулы для распределения скоростей:

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \alpha r \omega \left(1 + \frac{1}{Y} \ln \frac{z}{\delta}\right) \quad \text{при } z \leq z_1 < \delta, \\ v_r &= -\frac{\alpha r \omega}{Y} \ln \frac{z}{\delta} \quad \text{при } z_1 \leq z < \delta, \\ v_\varphi &= -\frac{r\omega}{Y} \ln \frac{z}{\delta}. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Вычисление интегралов, входящих в (4.1), (4.2), даст следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\delta v_r^2 dz &= \frac{2\alpha^2 r^2 \omega^2 \delta}{Y^2} \left(1 - Y e^{-\frac{1}{2}Y}\right), \\ \int_0^\delta v_r v_\varphi dz &= \frac{2\alpha r^2 \omega^2 \delta}{Y^2} \left[1 - \frac{1}{2} Y e^{-\frac{1}{2}Y} \left(1 + \frac{4}{Y}\right)\right], \\ \int_0^\delta v_\varphi^2 dz &= \frac{2r^2 \omega^2 \delta}{Y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

В то же время

$$\tau_\varphi = -\rho \frac{\sqrt{1+\alpha^2} r^2 \omega^2}{A^2 Y^2}. \quad (4.23)$$

Подставляя полученные выражения в уравнения (4.1), (4.2), Гольдштейн получает два сложных дифференциальных уравнения. Для случая больших значений Y уравнения упрощаются и находится значение $\alpha = \frac{1}{3}$, а также вид формулы

сопротивления, коэффициенты которой были определены Гольдштейном согласно опытным данным Шмидта и Кемфа (см. рис. 3). Окончательно получается следующая формула для коэффициента момента сопротивления:

$$c_M^{-\frac{1}{2}} = 1,97 \lg \left(R c_M^{\frac{1}{2}} \right) + 0,03. \quad (4.24)$$

При этом связь между величиной Y и числом $R = \frac{r^2 \omega}{v}$ получается следующей:

$$R = 0,826 Y e^Y. \quad (4.25)$$

Заметим, что формула (4.24) при больших значениях чисел R дает более высокие значения c_M , чем тщательные опыты NACA¹⁾.

Для более полного решения задачи²⁾ на основе формул (4.1), (4.2) при логарифмических формулах распределения скоростей предварительно, до подстановки выражений (4.17) и (4.18) в интегральные соотношения, произведем их аппроксимацию степенными формулами зависимости от $\frac{U\delta}{v}$:

$$f = a \left(\frac{U\delta}{v} \right)^b,$$

с различными значениями коэффициентов a и b в разных интервалах $\ln \frac{U\delta}{v}$. Как видно из рис. 21, числа a и b имеют следующие значения:

Интервал $\ln \frac{U\delta}{v}$	От 6,5 до 8,5	От 8,5 до 13	От 15 до 19
$f_1 = \frac{1}{Y^2} \left(1 - Y e^{-\frac{1}{2}Y}\right)$	$\begin{cases} a & 0,055 \\ b & -0,161 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,0498 \\ -0,152 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,033 \\ -0,12 \end{cases}$
$f_2 = \frac{1}{Y^2} \left[1 - \frac{1}{2} Y e^{-\frac{1}{2}Y} \left(1 + \frac{4}{Y}\right)\right]$	$\begin{cases} a & 0,0573 \\ b & -0,161 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,0506 \\ -0,152 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,033 \\ -0,12 \end{cases}$
$f_3 = \frac{1}{Y^2}$	$\begin{cases} a & 0,141 \\ b & -0,250 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,0789 \\ -0,184 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,033 \\ -0,12 \end{cases}$

¹⁾ См. сноску на стр. 21.

²⁾ Дорфман Л. А., Турбулентный пограничный слой на вращающемся диске, Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 7.

Приведем дальнейшие вычисления лишь для второго интервала $\ln \frac{U\delta}{\nu} = 8,5 \div 13$.

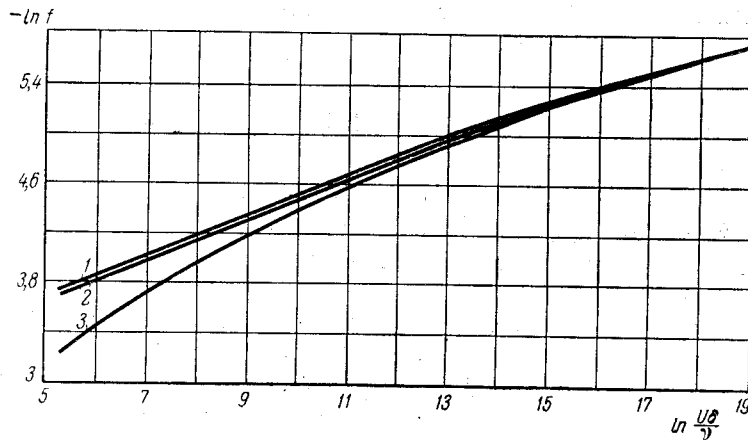


Рис. 21. Значения функций f_1, f_2, f_3 в зависимости от $\frac{U\delta}{\nu}$. Номера на кривых соответствуют индексам функций.

Подстановка полученных степенных выражений в соотношения (4.1), (4.2) с учетом (4.22) дает

$$\left. \begin{aligned} 0,0986 \frac{d}{dr} \left[r^3 \alpha^2 \delta \left(\frac{U\delta}{\nu} \right)^{-0,152} \right] - 0,1578 r^2 \delta \left(\frac{U\delta}{\nu} \right)^{-0,184} &= \\ &= -0,1262 r^3 \alpha \sqrt{1 + \alpha^2} \left(\frac{U\delta}{\nu} \right)^{-0,184}, \\ 0,1012 \frac{d}{dr} \left[r^4 \alpha \delta \left(\frac{U\delta}{\nu} \right)^{-0,152} \right] &= 0,1262 r^4 \sqrt{1 + \alpha^2} \left(\frac{U\delta}{\nu} \right)^{-0,184}. \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Решение ищем в виде

$$\delta = \beta r \left(\frac{r^2 \omega}{\nu} \right)^\mu, \quad \alpha = \alpha_0 \left(\frac{Ur}{\nu} \right)^\kappa = \alpha_0 \left(\frac{r^2 \omega}{\nu} \right)^\kappa (1 + \alpha^2)^{\frac{\kappa}{2}}, \quad (4.27)$$

причем показатели μ и κ определим из условия, чтобы в уравнениях (4.26) сократились множители, являющиеся степенями r . Это дает

$$\mu = \kappa = -0,016,$$

§ 17] ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГАРИФИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ СКОРОСТЕЙ 77

В результате после подстановки (4.27) в (4.26), дифференцирования и сокращений получим:

$$\left. \begin{aligned} 0,356 \alpha_0^2 \beta^{0,848} - 0,1578 \beta^{0,816} &= -0,1262 (1 + \alpha^2)^{0,462} \alpha_0 \beta^{-0,184}, \\ \alpha_0 &= 0,02693 \beta^{-1,032} (1 + \alpha^2)^{0,402}, \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

откуда следует

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= 0,4565 (1 + \alpha^2)^{-0,08}, \\ \beta &= 0,0643 (1 + \alpha^2)^{0,485}, \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Таким образом, получаем:

$$\alpha = 0,4565 \left(\frac{r^2 \omega}{\nu} \right)^{-0,016} (1 + \alpha^2)^{-0,016}. \quad (4.30)$$

Так как множитель $(1 + \alpha^2)^{-0,016}$ пренебрежимо мало отличается от 1, то в формулах (4.29) можно полагать

$$\alpha = 0,4565 \left(\frac{r^2 \omega}{\nu} \right)^{-0,016}.$$

С помощью полученных величин определяем момент сопротивления двух сторон диска радиуса R :

$$2M = 4\pi R^2 \rho \left[\int_0^\delta v_r v_\varphi dz \right]_{r=R}.$$

Для коэффициента момента c_M получим формулу

$$c_M = 0,1136 R^{-0,181} (1 + 0,21 R^{-0,232})^{0,318}. \quad (4.31)$$

Толщина пограничного слоя определится выражением

$$\frac{\delta}{R} = 0,0643 R^{-0,016} (1 + 0,21 R^{-0,032})^{0,485}. \quad (4.32)$$

Из этой формулы следует, что интервал $\ln \frac{U\delta}{\nu} = 8,5 \div 13$ соответствует интервалу значений $R \approx 9 \cdot 10^4 \div 9 \cdot 10^6$.

Аналогичные выражения для других двух интервалов дают следующие формулы:

в интервале значений R от 10^4 до $9 \cdot 10^4$

$$\left. \begin{aligned} c_M &= 0,0229R^{-0,239} (1 + 0,395R^{-0,08})^{0,241}, \\ \frac{\delta}{R} &= 0,0853R^{-0,043} (1 + 0,395R^{-0,08})^{0,46}, \\ \alpha &= 0,629R^{-0,043} (1 + 0,395R^{-0,08})^{-0,043}; \end{aligned} \right\} (4.33)$$

в интервале значений R от $6,4 \cdot 10^7$ до $3,3 \cdot 10^9$

$$\left. \begin{aligned} c_M &= 0,042R^{-0,122}, \\ \frac{\delta}{R} &= 0,0515, \\ \alpha &= 0,342. \end{aligned} \right\} (4.34)$$

На рис. 22 нанесены значения c_M для рассматриваемых

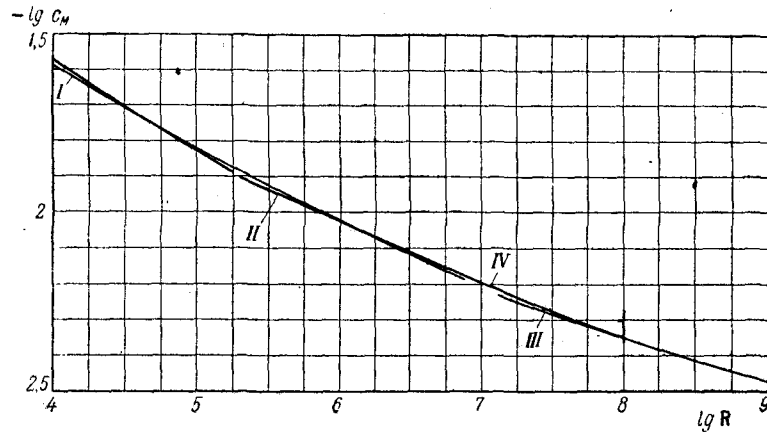


Рис. 22. Значения коэффициента момента сопротивления c_M для различных значений чисел Рейнольдса $r^2\omega/\nu$.

трех интервалов. Все эти значения объединяются общей формулой

$$c_M = 0,982 (\lg R)^{-2,58}. \quad (4.35)$$

Эта зависимость изображена кривой IV, являющейся огибающей кривых I, II, III.

Интересно то обстоятельство, что показатель степени в этой формуле равен соответствующему показателю в формуле сопротивления гладкой плоской пластинки¹⁾. Кривая, соответствующая формуле (4.35), хорошо согласуется с имеющимися опытными данными (рис. 3).

Нетрудно убедиться, что для толщины пограничного слоя общую формулу можно представить в виде

$$\frac{\delta}{r} = 0,05 + 5 (\lg R)^{-2,7}, \quad (4.36)$$

а для коэффициента α получится

$$\alpha \approx 0,33 + 3 (\lg R)^{-2,5}. \quad (4.37)$$

Уменьшение величины α с увеличением числа R подтверждается опытами по определению формы линий тока относительного движения жидкости в пограничном слое вращающегося диска²⁾.

§ 18. Сравнение с экспериментальными данными

Сравнение теоретических значений коэффициента момента сопротивления с опытными приводилось выше; оно изображено на рис. 3.

Сопоставим теперь профили скоростей для турбулентного режима, полученные замером, с теоретическими. Характерные результаты замеров изображены на рис. 18.

Вычислим вначале характерные толщины δ^* и δ^{**} для окружной составляющей скорости. В случае степенного профиля Кармана, согласно (4.3) и (4.8):

$$G = \frac{v_\varphi}{r\omega} = 1 - \xi^{\frac{1}{7}}, \quad \delta = 0,525r \left(\frac{\nu}{r^2\omega} \right)^{\frac{1}{5}} \quad \left(\xi = \frac{z}{\delta} \right),$$

поэтому

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \frac{v_\varphi}{r\omega} dz = \delta \int_0^1 G(\xi) d\xi = \frac{1}{8} \delta = 0,0656r \left(\frac{\nu}{r^2\omega} \right)^{\frac{1}{5}}. \quad (4.38)$$

¹⁾ См., например, формулу (100) на стр. 664 книги Л. Г. Лойцянского «Механика жидкости и газа», Гостехиздат, 1957.

²⁾ Bussman F., Die Grenzschichtbewegung auf rotierender Scheiben, Forschung auf d. Gebiete d. Ing. Wes., т. 21, № 9, 1931.

Аналогично вычисляется δ^{**} :

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} G(1-G) dz = \frac{7}{72} \delta = 0,051r \left(\frac{\nu}{r^2\omega} \right)^{\frac{1}{5}}. \quad (4.39)$$

Для величины $H^* = \delta^*/\delta^{**}$ получаем:

$$H^* = \frac{9}{7} = 1,285,$$

в то время как замеренное¹⁾ значение H^* при $R = \frac{r^2\omega}{\nu} = 323\,000$ оказалось равным 1,4.

Для логарифмического профиля скоростей, согласно (4.17):

$$G = -\frac{1}{Y} \ln \xi,$$

поэтому будем иметь:

$$\delta^* = \frac{\delta}{Y}, \quad \delta^{**} = \frac{\delta}{Y} \left(1 - \frac{2}{Y}\right), \quad H^* = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} = 1 - \left(1 - \frac{2}{Y}\right), \quad (4.40)$$

Согласно формуле Гольдштейна (4.25) для того же числа $R = 323\,000$ будем иметь $H^* = 1,24$. В то же время расчет по формулам § 17 для уточненного решения дает более близкое к опытному значение числа H^* , $H^* = 1,295$.

Вычислим теперь для того же числа Рейнольдса $R = 323\,000$ соответствующие профили скоростей и нанесем на график (рис. 23), беря в качестве безразмерного расстояния от диска величину $\xi = z/\delta^{**}$. Как видно, окружная составляющая, определяемая степенным и логарифмическими профилями, близка к экспериментальным значениям¹⁾. Для радиальной составляющей при степенном профиле скоростей получается большое отличие от замеренного распределения радиальных скоростей. Наилучшее согласование получается для случая уточненного решения с логарифмическим профилем, за исключением области, непосредственно примыкающей к стенке до максимума F .

Логарифмический профиль дает также хорошее согласование с опытными данными по углу $\Phi_0 = \arctg \frac{F}{G}$, составляемому

¹⁾ См. сноску на стр. 19.

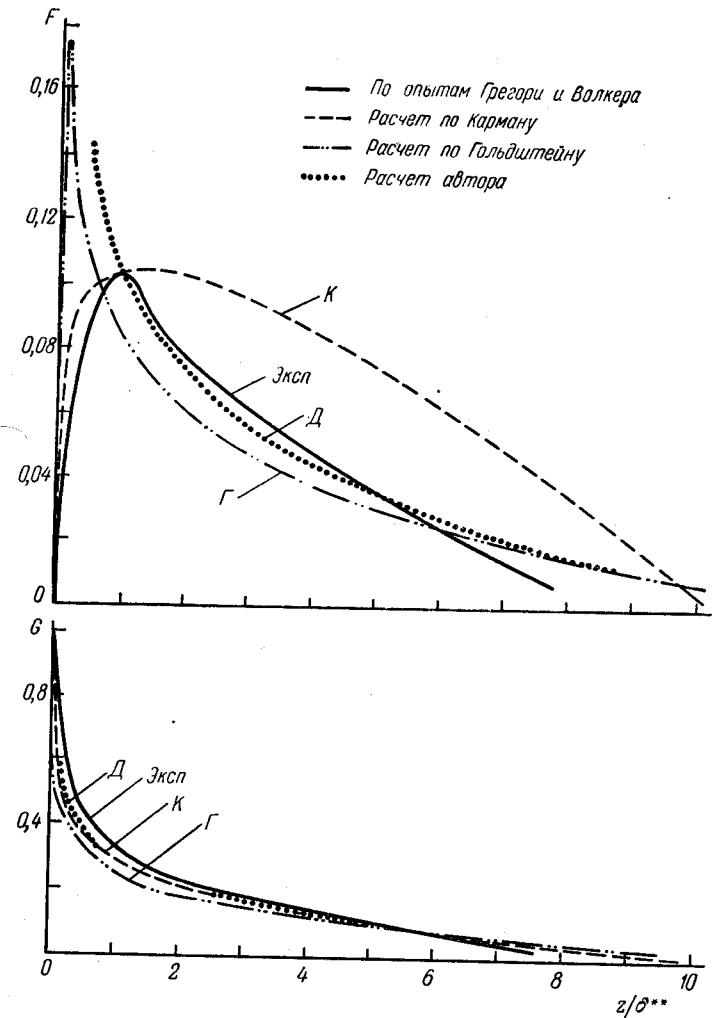


Рис. 23. Распределение радиальных и окружных составляющих скорости вблизи вращающегося диска при турбулентном режиме; $n = 2100$ об/мин, $r = 146$ мм ($R = 323\,000$.)

вектором касательной скорости на внешней границе пограничного слоя с окружным направлением.

Для степенного профиля Кармана

$$\Phi_\delta = \arctg \frac{F}{G} = \arctg \alpha \frac{\xi^{\frac{1}{7}}(1-\xi)}{1-\xi^{\frac{1}{7}}} = \arctg 7\alpha = 48^\circ 36',$$

для решения Гольдштейна

$$\Phi_\delta = \arctg \frac{F}{G} = \arctg \alpha = \arctg \frac{1}{3} = 18^\circ 22',$$

в то время как опытные значения Φ_δ изменяются в пределах от 18 до 23°. Уточненное решение для логарифмического профиля скоростей дает такие же значения Φ_δ . Например, при $R = 323\,000$ получаем $\alpha = 0,373$, т. е. $\Phi_\delta = 20^\circ 25'$, что удовлетворительно согласуется с замерами (см. рис. 18).

Опыты Коба и Саундерса¹⁾ также показали (см. рис. 35 на стр. 117), что имеется согласование теоретических данных по Карману с замерами полной касательной скорости при турбулентном режиме.

§ 19. Влияние шероховатости поверхности диска

Шероховатость поверхности вращающегося диска проявляется в заметном увеличении трения. Однако, как и в случае течения в трубках и вдоль плоской стенки, если высота бугорка шероховатости значительно меньше толщины ламинарного подслоя $k \ll \delta_n$, то трение не увеличивается, так как бугорки обтекаются в этом случае без отрывов и вихреобразований. Это *режим без проявления шероховатости*.

Если же высота бугорков k имеет тот же порядок величины, что и δ_n , то начинает проявляться влияние шероховатости — *переходный или промежуточный режим*.

Наконец, существенно проявляется шероховатость в случае, когда бугорки шероховатости выходят заметно за пределы ламинарного подслоя, $k \gg \delta_n$. Отрывное обтекание бугорков приводит к тому, что структура потока и трение становятся независимыми от числа Рейнольдса и зависят лишь от относительной шероховатости k/R . Это *режим развитой шероховатости*.

¹⁾ Cobb E. C., and Saunders O. A., Heat transfer from a rotating disk, Proc. Roy. Soc, ser. A, т. 236, № 1206, 1956.

Для расчета сопротивления вращающегося шероховатого диска¹⁾ на режиме развитой шероховатости обратимся к логарифмическому профилю скорости, который наблюдался в шероховатых трубах:

$$\frac{u}{v_*} = A \ln \frac{z}{k_s} + B, \quad A = 2,5, \quad B = 8,5, \quad (4.41)$$

где k_s обозначает высоту бугорка равнoзернистой и максимально плотной, так называемой *песочной* шероховатости.

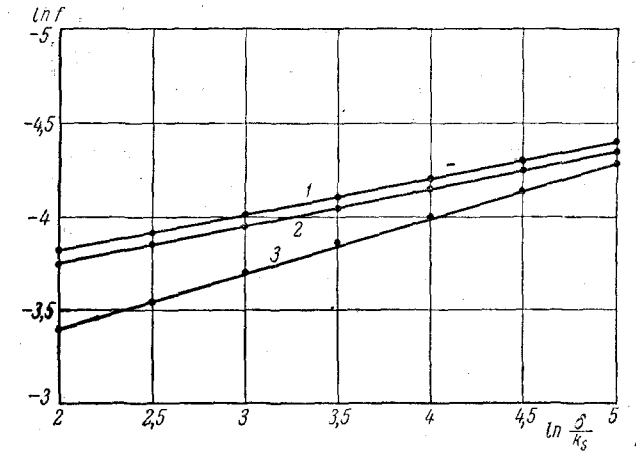


Рис. 24. Значения функций f_1, f_2, f_3 в зависимости от δ/k_s . Номера на кривых соответствуют индексам функций.

На внешней границе пограничного слоя скорость достигает значения

$$u|_{z=\delta} = U = v_* A \ln \frac{\delta}{k_s} + B v_*,$$

так что величина Y , определяемая формулой (4.20), здесь принимает вид:

$$Y = \frac{U}{A v_*} = \ln \frac{\delta}{k_s} + \frac{B}{A}. \quad (4.42)$$

Для интегралов, входящих в систему уравнений (4.1), (4.2), справедливы формулы (4.22). До подстановки их в уравнения (4.1), (4.2) аппроксимируем их степенными формулами зависимости от k_s/δ с помощью формулы (4.42). Как

¹⁾ Дорфман Л. А., Журнал технической физики, т. 28, № 2, 1958.

видно из рис. 24, где кружками обозначены точные значения величин, а прямые показывают результат аппроксимации, в интервале $\ln \frac{\delta}{k_s} = 2 \div 5$ получаем следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{Y^2} \left(1 - Y e^{-\frac{1}{2} Y} \right) = 0,032 \left(\frac{k_s}{\delta} \right)^{0,19}, \\ f_2 &= \frac{1}{Y^2} \left[1 - \frac{1}{2} Y e^{-\frac{1}{2} Y} \left(1 + \frac{4}{Y} \right) \right] = 0,0335 \left(\frac{k_s}{\delta} \right)^{0,19}, \\ f_3 &= \frac{1}{Y^2} = 0,057 \left(\frac{k_s}{\delta} \right)^{0,28}, \quad \frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{1}{A^2 Y^2} = 0,0091 \left(\frac{k_s}{\delta} \right)^{0,28} \end{aligned} \right\} (4.43)$$

Подставив эти выражения в интегральные соотношения импульсов (4.1) и (4.2), после сокращения на множитель $\omega^2 \rho$ получим:

$$\left. \begin{aligned} 0,064 \frac{d}{dr} (r^3 \delta k_s^{0,19} \delta^{-0,19} \alpha^2) - 0,114 r^2 \delta^{0,72} k_s^{0,28} &= \\ &= -0,0091 \alpha r^3 k_s^{0,28} \delta^{-0,28} \sqrt{1 + \alpha^2}, \\ 0,067 \frac{d}{dr} (r^4 \alpha \delta k_s^{0,19} \delta^{-0,19}) &= \\ &= 0,0091 r^4 k_s^{0,28} \delta^{-0,28} \sqrt{1 + \alpha^2}. \end{aligned} \right\} (4.44)$$

Решение ищем в виде

$$\alpha = \alpha_0 k_s^\mu r^{-\mu}, \quad \delta = \beta_0 k_s^\nu r^{1-\nu}, \quad (4.45)$$

причем показатели μ и ν находим из условия, чтобы в уравнениях (4.44) сократились множители, являющиеся степенями k_s . Нетрудно определить, что искомыми значениями являются

$$\mu = \nu = 0,043.$$

В результате после дифференцирования и сокращений получаем из (4.44) уравнения

$$\left. \begin{aligned} 0,236 \alpha_0^2 \beta_0^{0,81} - 0,114 \beta_0^{0,72} &= -0,0091 \alpha_0 \beta_0^{-0,28} \sqrt{1 + \alpha^2}, \\ \alpha_0 &= 0,0287 \beta_0^{-1,09} \sqrt{1 + \alpha^2}. \end{aligned} \right\} (4.46)$$

Отсюда имеем:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= 0,512 (1 + \alpha^2)^{-0,022}, \\ \beta_0 &= 0,0712 (1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2,09}}. \end{aligned} \right\} (4.47)$$

Величина $(1 + \alpha^2)^{-0,022}$ пренебрежимо мало отличается от 1, поэтому с достаточным приближением можно считать

$$\alpha_0 = 0,512.$$

Например, даже при таком большом значении r/k_s , как 100, разность $(1 + \alpha^2)^{-0,022} - 1$ равна $\sim 0,01$. Таким образом, в формулах (4.47) с большой точностью можно полагать

$$\alpha = 0,512 \left(\frac{k_s}{r} \right)^{0,043}. \quad (4.48)$$

Момент сопротивления двух сторон вращающегося диска будет тогда равен

$$\begin{aligned} 2M &= 4\pi R^2 \rho \left[\int_0^\delta v_r v_\varphi dz \right]_{r=R} = \\ &= 4\pi R^2 \rho [2\alpha R^2 \omega^2 \delta \cdot 0,0335 k_s^{0,19} \delta^{-0,19}]_{r=R}, \end{aligned}$$

что дает для коэффициента момента

$$c_M = 0,1015 \left(\frac{k_s}{R} \right)^{0,268} \left[1 + 0,262 \left(\frac{k_s}{R} \right)^{0,086} \right]^{0,365}. \quad (4.49)$$

Нетрудно заметить (рис. 25), что эту формулу можно упростить, представив в виде

$$c_M = 0,108 \left(\frac{k_s}{R} \right)^{0,272}. \quad (4.50)$$

Так как интервал $\ln \frac{\delta}{k_s}$ от 2 до 5 соответствует интервалу $125 \leq \frac{R}{k_s} < 3000$, то указанные формулы справедливы в этом интервале R/k_s . Зависимость толщины пограничного слоя в этом, исходя из (4.45) — (4.48), определяется формулой

$$\frac{\delta}{r} = 0,0712 \left[1 + 0,262 \left(\frac{k_s}{r} \right)^{0,086} \right]^{\frac{1}{2,09}} \left(\frac{k_s}{r} \right)^{0,043}, \quad (4.51)$$

или упрощенно

$$\frac{\delta}{r} \approx 0,08 \left(\frac{k_s}{r} \right)^{0,05}. \quad (4.52)$$

Некоторые экспериментальные данные о трении шероховатого диска, вращающегося в большом объеме жидкости, приведены в работе А. А. Канаева¹⁾. Стальной диск радиуса $R=0,135$ м и толщиной $b=0,01$ м был покрыт искусственной песочной шероховатостью с высотой бугорка

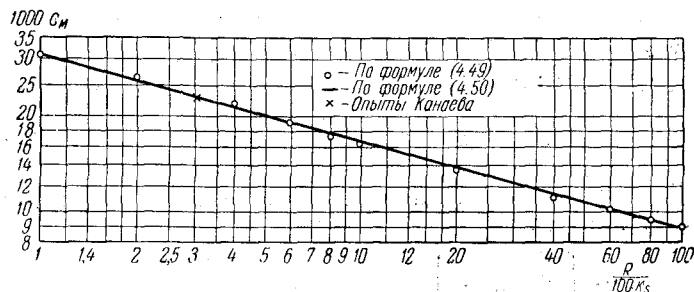


Рис. 25. Зависимость коэффициента момента сопротивления шероховатого диска от величины R/k_s .

$k_s=0,45$ мм. Диск прокручивался в воде, заполнявшей сосуд больших размеров. При этом, как видно из рис. 4 цитируемой работы, максимальное достигнутое значение коэффициента момента трения диска и обода равно $c'_M=0,027$. Если исключить трение обода, исходя из формулы

$$c'_M = c_M \left(1 + 2,5 \frac{b}{R} \right),$$

приведенной в рассматриваемой работе, то для коэффициента трения двух сторон диска получим значение $c_M=0,0228$ при $\frac{R}{k_s}=300$. Подсчет по формуле (4.50) дает очень близкую величину $c_M=0,0229$.

Заметим, что данные опытов Канаева по трению шероховатого стального диска о ртуть не согласуются с формулой (4.50).

¹⁾ Канаев А. А., Журнал техн. физики, т. XXIII, вып. 2, 1953.

Это вполне объяснимо горизонтальным расположением диска, принятым в этих опытах. В этом случае для шероховатого диска начинают заметно сказываться объемные силы, обусловленные силой тяжести глубокого слоя тяжелой жидкости, расположенного над диском. Сопротивление трения значительно увеличивается, становится пропорциональным шероховатости.

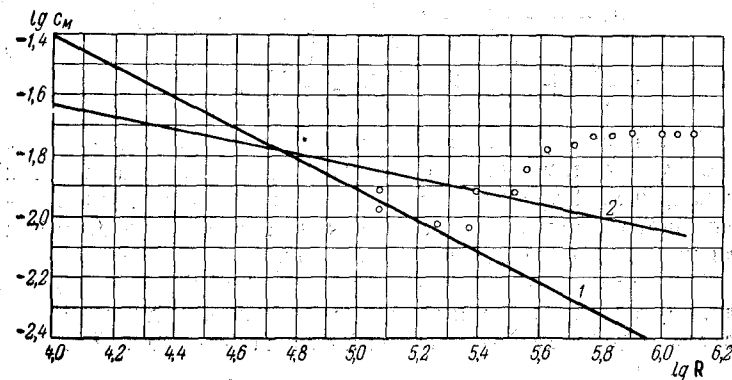


Рис. 26. Коэффициент момента сопротивления для диска в зависимости от числа Рейнольдса $R = \frac{R^2 \omega}{\nu}$: 1 — для ламинарного режима при гладком диске [формула Кокрена (2.17)]; 2 — для турбулентного режима при гладком диске [формула Кармана (4.10)]; кружками указаны опытные данные Теодорсена и Регира для $R/k_s=1205$.

На рис. 26 представлен результат замеров Теодорсена и Регира¹⁾ для диска, покрытого песочной шероховатостью с относительной высотой бугорка шероховатости $\frac{k_s}{R} = \frac{1}{1205}$. Полученные значения c_M несколько выше подсчитанных по формуле (4.50). Возможно, что здесь сказывается влияние обода.

§ 20. Влияние обдува диска при турбулентном режиме

Применим для расчета²⁾ метод Кармана (§ 16). Для этого вначале выведем интегральные соотношения пограничного слоя вблизи диска.

¹⁾ См. сноску на стр. 21.

²⁾ Truckenbrodt E., Turbulente Strömung an einer angeblasenen rotierender Scheibe, ZAMM, 1954, № 4/5.

Если применить обычные соображения теории пограничного слоя, то для получения из основной системы (1.1) дифференциальных уравнений пограничного слоя достаточно в этих уравнениях из всех членов, зависящих от вязкости, сохранить лишь последние, представляющие производные по направлению нормали к плоскости диска; тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_r}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi v_r}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_\varphi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (4.53)$$

При этом оставшиеся члены, зависящие от вязкости, мы заменили, согласно (1.3)¹⁾, соответствующими производными от напряжений трения. В таком виде система уравнений пограничного слоя справедлива как для ламинарного, так и для турбулентного пограничного слоя.

Проинтегрируем первое из уравнений (4.53) в направлении, перпендикулярном к диску, от поверхности диска ($z=0$) до $z=h \gg \delta$, где δ — толщина пограничного слоя. При этом член $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$ в соответствии с уравнением Бернулли

$$p + \frac{\rho U^2}{2} + \frac{\rho W^2}{2} = \text{const},$$

в котором U — радиальная, а W — осевая составляющие скорости внешнего потока, и формулами (2.29) можно записать в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = -U \frac{dU}{dr}.$$

Тогда получим, умножив еще на r :

$$\int_0^h \left(r v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - r U \frac{dU}{dr} \right) dz + r \int_0^h v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} dz - \int_0^h v_\varphi^2 dz = -\frac{r \tau_r}{\rho}, \quad (4.54)$$

где τ_r — радиальная составляющая напряжения трения на стенке.

¹⁾ Пренебрегая членом $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ по сравнению с $\frac{\partial v_r}{\partial z}$ вблизи стенки.

Используя уравнение неразрывности (1.2), исключим v_z :

$$v_z = - \int_0^z \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right) dz.$$

Почленное интегрирование второго интеграла в соотношении (4.54) тогда дает

$$r \int_0^h v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} dz = -U \int_0^h \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \right) dz + \int_0^h \left(r v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r^2 \right) dz.$$

Подставив это выражение в (4.54), получим после перегруппирования членов искомое интегральное соотношение импульсов для меридионального направления:

$$\frac{d}{dr} \left[r \int_0^h (U - v_r) v_r dz \right] + r \frac{dU}{dr} \int_0^h (U - v_r) dz + \int_0^h v_\varphi^2 dz = r \frac{\tau_r}{\rho}. \quad (4.55)$$

Заметим, что верхний предел интегрирования может быть взят любой от δ до ∞ , так как подинтегральные выражения равны нулю при $h \gg \delta$.

Аналогично из второго уравнения (4.53) выводится интегральное соотношение импульсов для окружного направления; при этом получается уравнение (4.2). Заметим, что в случае отсутствия обдува диска ($U=0$) уравнение (4.55) превращается в уравнение (4.1). Теперь выберем соответствующие профили скоростей в пограничном слое.

Профиль окружных скоростей в пограничном слое будет выражаться той же формулой (4.3), что и для случая без обдува:

$$G = \frac{v_\varphi}{r\omega} = 1 - \left(\frac{z}{\delta} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

В то же время, для того чтобы радиальная составляющая на внешней границе пограничного слоя удовлетворяла условию (2.29):

$$F|_{z=\delta} = \frac{v_r}{r\omega} \Big|_{z=\delta} = \frac{a}{\omega},$$

профилю радиальных скоростей следует придать вид:

$$F = \left[\alpha \left(1 - \frac{z}{\delta} \right) + \frac{a}{\omega} \frac{z}{\delta} \right] \left(\frac{z}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}}. \quad (4.56)$$

При $a = 0$ получаем формулу (4.3) для F .

Как и ранее [см. (4.13)] вблизи диска ($z \rightarrow 0$)

$$\frac{v_r}{\omega r - v_\varphi} = -\frac{\tau_r}{\tau_\varphi} = \alpha,$$

и имеют место формулы (4.14) для составляющих сил трения. Вычисление интегралов, входящих в соотношения импульсов (4.55), (4.2) дает

$$\int_0^\delta v_r^2 dz = (0,207\omega^2\alpha^2 + 0,266a\omega\alpha + 0,304a^2)r^2\delta,$$

$$\int_0^\delta v_r v_\varphi dz = 0,0681(r\omega)^2\alpha\delta + 0,0292a\omega r^2\delta,$$

$$\int_0^\delta v_\varphi^2 dz = 0,0278(r\omega)^2\delta.$$

Подставляем эти значения в соотношения (4.55), (4.2), представив $\frac{\delta}{r}$ в виде

$$\frac{\delta}{r} = \beta \left(\frac{\omega r^2}{\nu} \right)^{-\frac{1}{5}}.$$

Тогда получится после почленного деления одного уравнения на другое, что величина β исключается, и будем иметь квадратное уравнение для определения α :

$$\alpha^2 + 0,0294 \frac{a}{\omega} \alpha = 0,0262 + 1,0557 \left(\frac{a}{\omega} \right)^3.$$

Таким образом,

$$\alpha = \sqrt{0,0262 + 1,0559 \left(\frac{a}{\omega} \right)^3} - 0,0147 \frac{a}{\omega}. \quad (4.57)$$

Величина β определится из второго интегрального соотношения (4.2), которое принимает вид:

$$0,1342 \frac{a}{\omega} + 0,3131\alpha = 0,0225(1 + \alpha^2)^{\frac{3}{8}} \beta^{-\frac{5}{4}}.$$

Отсюда получаем:

$$\beta = 0,0481 \left[\frac{(1 + \alpha^2)^{3/8}}{0,1342 \frac{a}{\omega} + 0,3131\alpha} \right]^{4/5}, \quad (4.58)$$

а для составляющих напряжения трения в соответствии с формулами (4.4) и (4.6) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\omega r^2}{\nu} \right)^{0,2} \frac{\tau_r}{\rho(\omega r)^2} &= 0,0481\alpha(1 + \alpha^2)^{0,3} \left(0,1342 \frac{a}{\omega} + 0,3131\alpha \right)^{0,2}, \\ \left(\frac{\omega r^2}{\nu} \right)^{0,2} \frac{\tau_\varphi}{\rho(\omega r)^2} &= -0,0481(1 + \alpha^2)^{0,3} \left(0,1342 \frac{a}{\omega} + 0,3131\alpha \right)^{0,2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.59)$$

Интегрируя τ_φ , получим формулу для c_M . Для случая $a = 0$ получаем, естественно, результат Кармана. Теперь можно вычислить коэффициент увеличения τ_φ в результате обдува:

$$\Lambda = \frac{\tau_\varphi}{(\tau_\varphi)_{a=0}},$$

представленный на рис. 7 (стр. 31). Как видно, при неизменной угловой скорости крутящий момент быстро увеличивается с увеличением скорости набегающего потока, быстрее, чем для случая ламинарного режима.

Заметим при этом, что для случая малых ω , особенно вблизи предельного случая отсутствия вращения ($\omega = 0$), выведенные выше соотношения неудобны для непосредственного использования. Поэтому их необходимо преобразовать, видоизменив параметры, а именно: если обозначить

$$a^* = \frac{\omega}{a} \alpha, \quad \beta^* = \left(\frac{a}{\omega} \right)^{0,2} \beta, \quad (4.60)$$

то получим следующие формулы:

$$\alpha^* = \sqrt{0,0147 \left(\frac{\omega}{a} \right)^3 + 1,0559} - 0,0147, \quad (4.57a)$$

$$\beta^* = 0,0481 \left\{ \frac{\left[\left(\frac{\omega}{a} \right)^3 + \alpha^{*2} \right]^{3/8}}{0,1342 + 0,3131\alpha^*} \right\}^{4/5}. \quad (4.58a)$$

Вычисления показывают, что для очень малых значений получается асимптотическое решение

$$c_M = \frac{0,226}{\left(\frac{\omega R^2}{\nu}\right)^{0,8}} \left(\frac{a}{\omega}\right)^{0,8}. \quad (4.61)$$

В цитированной работе Труккенбротта¹⁾ решения приводятся в виде, удобном для получения результатов и для других степенных профилей скоростей в пограничном слое вращающегося диска. Это необходимо для расчетов при больших значениях чисел Рейнольдса, где уже не сохраняется степень $1/7$ для профиля скоростей.

1) См. сноску²⁾ на стр. 87.

ГЛАВА V

ТЕПЛОТДАЧА ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДИСКА

§ 21. Нагревание вязкой жидкости вращающимся диском. Точное решение уравнения баланса энергии

Используя значения скоростей из точного решения уравнений Навье-Стокса для вращающегося диска (§ 4), можно определить поле температур, решая уравнение баланса энергии (1.7) при заданных граничных условиях.

Впервые такое решение получено И. А. Кибелем¹⁾, который заметил, что уравнение (1.7) можно удовлетворить, если распределение температур искать в виде

$$T(z, r) = T_1(z) + r^2 T_2(z), \quad (5.1)$$

где T_1 и T_2 — функции одного z . Действительно, вставляя (5.1) в уравнение (1.7) и сделав замену переменных (2.6) для скоростей, получим, собирая члены при одинаковых степенях r , следующие два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \tau_2'' - P(H\tau_2' + 2F\tau_2) &= -F'^2 - G'^2, \\ \tau_1'' - PH\tau_1' &= -4\tau_2 - 4F^2 - 2H'^2, \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

относительно переменных

$$\tau_1(\zeta) = \frac{\lambda}{\mu\omega\nu} T_1(z), \quad \tau_2(\zeta) = \frac{\lambda}{\mu\omega^2} T_2(z), \quad (5.3)$$

где $P = \frac{\mu c_p}{\lambda}$ — число Прандтля, а штрихи обозначают производные по переменной ζ .

1) К и б е л ь И. А., Нагревание вязкой жидкости вращающимся диском, Прикл. матем. и мех., XI, 1947, № 6.

Следует заметить, что распределение (5.1) соответствует лишь определенному виду граничных условий — квадратичному распределению температур по радиусу диска, так как, согласно (5.1):

$$T(0) = T_1(0) + T_2(0)r^2. \quad (5.4)$$

В случае, когда число Прандтля равно единице, задача решается в квадратурах. При этом функция $T_2(z)$ определяется в конечном виде через составляющие скорости, параллельные плоскости диска. Чтобы в этом убедиться, запишем первое уравнение (5.2) (при $P=1$) в виде

$$\tau_2' H + 2F\tau_2 = \tau_2'' + F'^2 + G'^2,$$

умножим первое уравнение (2.7) на F :

$$FF'H + FF^2 - FG^2 = F''F,$$

а второе уравнение (2.7) на $G+k$, где k — произвольная постоянная:

$$(G+k)G'H + 2FG(G+k) = (G+k)G'',$$

и сложим полученные три уравнения. Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} H\left[\tau_2 + \frac{1}{2}(F^2 + G^2) + kG\right]' + 2F\left[\tau_2 + \frac{1}{2}(G^2 + F^2) + kG\right] &= \\ &= \left[\tau_2 + \frac{1}{2}(G^2 + F^2) + kG\right]'' \end{aligned}$$

Решением этого уравнения является выражение

$$\tau_2 + \frac{1}{2}(G^2 + F^2) + kG = 0. \quad (5.5)$$

Постоянная k определяется по заданному граничному условию.

Если диск теплоизолирован, то

$$\frac{d\tau_2}{d\zeta} = 0 \quad \text{при } \zeta = 0,$$

и из (5.5) следует

$$G(0)G'(0) + kG'(0) = 0,$$

т. е. $k = -1$, и получаем решение

$$\tau_2 = G - \frac{1}{2}(G^2 + F^2). \quad (5.6)$$

В случае, если температура стенки постоянна, т. е.

$$\tau_2 = 0 \quad \text{при } \zeta = 0,$$

то $k = -\frac{1}{2}$ и распределение безразмерных температур τ_2 имеет вид:

$$\tau_2^* = \frac{1}{2}G - \frac{1}{2}(G^2 + F^2). \quad (5.7)$$

В общем случае квадратичного распределения температур (5.4) по радиусу диска, когда

$$\tau(0) = \tau_{10} + r^2\tau_{20}, \quad (5.8)$$

распределение температур $\tau_2(\zeta)$ имеет вид:

$$\tau_2(\zeta) = \tau_2^*(\zeta) + \tau_{20}G(\zeta). \quad (5.9)$$

Следует заметить, что решение (5.5) предполагает, что отсчет температур выбран таким, чтобы $\tau_2(\infty) = 0$.

После того как τ_2 определено, можно найти τ_1 из второго уравнения (5.2):

$$\begin{aligned} \tau_1 = C + \int_0^\zeta \left\{ \exp\left(\int_0^\zeta H d\zeta\right) \times \right. \\ \left. \times \left[D - 4 \int_0^\zeta (\tau_2 + 3F^2) \exp\left(-\int_0^\zeta H d\zeta\right) d\zeta \right] \right\} d\zeta, \end{aligned}$$

где постоянные C и D определяются из граничных условий.

При вращении теплоизолированного диска

$$\frac{d\tau_1}{d\zeta} = 0 \quad \text{при } \zeta = 0,$$

поэтому $D = 0$, а условие $\tau_1(\infty) = 0$ дает

$$\begin{aligned} C = 4 \int_0^\infty \left\{ \exp\left(\int_0^\zeta H d\zeta\right) \times \right. \\ \left. \times \left[\int_0^\zeta (\tau_2 + 3F^2) \exp\left(-\int_0^\zeta H d\zeta\right) d\zeta \right] \right\} d\zeta \approx 7.6. \end{aligned}$$

При квадратичном распределении (5.8) температурных напоров по радиусу диска будем иметь:

$$C = \tau_{10},$$

$$\tau_{10} + D \int_0^{\infty} \exp\left(\int_0^{\zeta} H d\zeta\right) d\zeta - 4 \int_0^{\infty} \left\{ \exp\left(\int_0^{\zeta} H d\zeta\right) \times \right. \\ \left. \times \left[\int_0^{\zeta} (\tau_2^* + \tau_{20} G + 3F^2) \exp\left(-\int_0^{\zeta} H d\zeta\right) d\zeta \right] \right\} d\zeta = 0,$$

или

$$D \approx 3,83\tau_{20} + 1,218 - 0,399\tau_{10}.$$

В этом случае функция $\tau_1(\zeta)$ примет вид:

$$\tau_1(\zeta) = \tau_{10}\alpha(\zeta) + \beta(\zeta) + \tau_{20}\gamma(\zeta). \quad (5.10)$$

Значения функций $\tau_1(\zeta)$, $\tau_2(\zeta)$ для теплоизолированного диска, а также $\tau_2^*(\zeta)$, $\alpha(\zeta)$, $\beta(\zeta)$, $\gamma(\zeta)$ приведены в таблице 8.

Для вычисления коэффициента теплоотдачи находим значения производных:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1'(0) &= D = 3,83\tau_{20} + 1,218 - 0,399\tau_{10}, \\ \tau_2'(0) &= -0,616\tau_{20} + 0,308. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Отсюда для числа

$$N = -\frac{rT'(0, r)}{T(0, r)}$$

при $P=1$ получаем следующую формулу¹⁾:

$$\frac{N}{\sqrt{R}} = 0,616 - 0,217 \frac{T_{10}}{T(0, r)} - \\ - 3,83 R^{-1} \left(1 - \frac{T_{10}}{T(0, r)}\right) - 1,218 \frac{\theta}{R} - 0,308\theta, \quad (5.12)$$

где через θ обозначен температурный критерий

$$\theta = \frac{r^2 \omega^2}{g c_p T(0, r)} \quad (5.13)$$

(g — ускорение силы тяжести).

¹⁾ Дорфман Л. А., Влияние радиального градиента температур на теплоотдачу вращающегося диска. Изв. АН СССР, ОТН, № 12, 1957.

Значения функций, определяющих распределение температуры вблизи диска, вращающегося в неподвижной жидкости

ζ	α	β	γ	τ_1	τ_2	τ_2^*
0	1	0	0	7,600	0,500	0
0,1	0,960	0,122	0,364	7,590	0,497	0,027
0,2	0,920	0,241	0,689	7,558	0,489	0,050
0,3	0,880	0,358	0,979	7,505	0,477	0,068
0,4	0,841	0,470	1,236	7,432	0,462	0,081
0,5	0,801	0,576	1,459	7,338	0,446	0,092
0,6	0,762	0,675	1,653	7,223	0,427	0,099
0,7	0,724	0,765	1,819	7,089	0,408	0,104
0,8	0,686	0,846	1,957	6,937	0,388	0,107
0,9	0,649	0,918	2,071	6,768	0,367	0,108
1,0	0,612	0,980	2,162	6,584	0,342	0,108
1,1	0,577	1,032	2,232	6,386	0,327	0,107
1,2	0,543	1,074	2,280	6,177	0,307	0,105
1,3	0,510	1,108	2,315	5,959	0,288	0,103
1,4	0,478	1,132	2,332	5,736	0,270	0,099
1,5	0,447	1,148	2,335	5,506	0,252	0,095
1,6	0,418	1,157	2,325	5,272	0,236	0,092
1,7	0,389	1,160	2,305	5,036	0,219	0,087
1,8	0,363	1,156	2,276	4,797	0,204	0,083
1,9	0,337	1,147	2,238	4,562	0,189	0,078
2,0	0,313	1,138	2,194	4,332	0,175	0,074
2,1	0,291	1,117	2,145	4,105	0,163	0,070
2,2	0,269	1,096	2,090	3,879	0,151	0,065
2,3	0,242	1,074	2,033	3,664	0,139	0,061
2,4	0,230	1,048	1,974	3,455	0,129	0,057
2,5	0,212	1,022	1,912	3,253	0,119	0,053
2,6	0,196	0,994	1,849	3,058	0,110	0,050
2,8	0,166	0,935	1,724	2,694	0,094	0,043
3,0	0,141	0,879	1,598	2,362	0,078	0,036
3,2	0,120	0,826	1,484	2,062	0,067	0,032
3,4	0,102	0,770	1,375	1,793	0,056	0,027
3,6	0,086	0,720	1,274	1,554	0,048	0,023
3,8	0,073	0,673	1,175	1,343	0,041	0,020
4,0	0,062	0,629	1,080	1,157	0,034	0,017
4,2	0,052	0,590	1,002	0,993	0,028	0,014
4,4	0,044	0,554	0,935	0,850	0,024	0,012
∞	0	0	0	0	0	0

Температурный критерий θ для сжимаемого газа можно выразить через число M для вращающегося диска:

$$M = \frac{r\omega}{c_{зв}}, \quad (5.14)$$

где $c_{зв}$ — скорость звука для параметров среды на поверхности диска:

$$c_{зв}^2 = g c_p (k - 1) T, \quad k = \frac{c_p}{c_v}. \quad (5.15)$$

Действительно, после использования выражений (5.14) и (5.15) получим:

$$\theta = (k - 1) M^2. \quad (5.16)$$

Члены, содержащие θ , учитывают диссипацию энергии в пограничном слое. При малых скоростях вращения диска ими можно пренебречь. В условиях вращения дисков турбомашин числа R настолько большие, что можно также пренебречь членами, содержащими R^{-1} .

Формула (5.12) указывает на существенное влияние радиального градиента температур на теплоотдачу вращающегося диска. Например, при отсутствии радиального градиента температур без учета диссипации формула (5.12) принимает вид:

$$N = 0,399 \sqrt{R}. \quad (5.17)$$

В то же время при чисто квадратичном градиенте температур, т. е. при $T_{10} = 0$, получаем:

$$N = 0,616 \sqrt{R}, \quad (5.18)$$

т. е. теплоотдача возрастает более чем в полтора раза. Заметим, что в действительных условиях работы дисков турбомашин имеется радиальный градиент температур, близкий к квадратичному.

Приведенные выше расчеты показывают, что необходимо учитывать влияние этого градиента на коэффициент теплоотдачи.

В работе Кибеля намечен также путь решения задачи для чисел Прандтля, отличных от единицы. При вращении теплоизолированного диска функция τ_2 для малых ζ разыскивается в виде степенного ряда

$$\tau_2 = t_0 + t_2 \zeta^2 + t_3 \zeta^3 + \dots, \quad (5.19)$$

в котором t_2 , t_3 и т. д. все легко определяются через t_0 после подстановки ряда в первое уравнение (5.2). С другой стороны, для больших ζ асимптотическое представление τ_2 будет

$$\tau_2 = e^{-P\alpha\zeta} (M_0 + M_1 e^{-\alpha\zeta} + M_2 e^{-2\alpha\zeta} + \dots) + N_1 e^{-\alpha\zeta} + N_2 e^{-2\alpha\zeta} + \dots, \quad (5.20)$$

причем все коэффициенты M_1 , M_2 , ..., N_1 , N_2 , ... определяются через M_0 . Сравнив по примеру Кокрэна оба представления и их производные в какой-либо точке, получим два уравнения для определения t_0 и M_0 . Вычислив τ_2 , можем τ_1 найти путем квадратур в соответствии со вторым уравнением (5.2):

$$\tau_1 = C + \int_0^{\zeta} \exp \left(P \int_0^{\zeta} H d\zeta \right) \left\{ D - 2 \int_0^{\zeta} [2\tau_2 + 2F^2 + (H')^2] \exp \left(-P \int_0^{\zeta} H d\zeta \right) d\zeta \right\} d\zeta,$$

где постоянные C и D находятся из граничных условий.

В случае теплоотдающего диска степенный ряд для τ_2^* берется в виде

$$\tau_2^* = \tau_{20} + t_1 \zeta + t_2 \zeta^2 + \dots, \quad (5.21)$$

где t_1 неизвестно, а все остальные коэффициенты определяются через t_1 . Для больших значений ζ асимптотическое разложение τ_2^* имеет также вид (5.20).

Непосредственным численным интегрированием уравнений (5.2) Миллсепс и Польгаузен¹⁾ определили значения функций α , β и τ_2^* для различных чисел Прандтля. Их результаты представлены на рис. 27—30. Заметим, что значения α и τ_2^* для $P=1$ хорошо согласуются с данными таблицы 8, в то время как значения β на графике (рис. 29) заметно меньше соответствующих значений из таблицы.

¹⁾ Millsaps K. and Pohlhausen K., Heat transfer by laminar flow from a rotating plate, J. of the Aeron. Sc., т. 19, № 2, 1952.

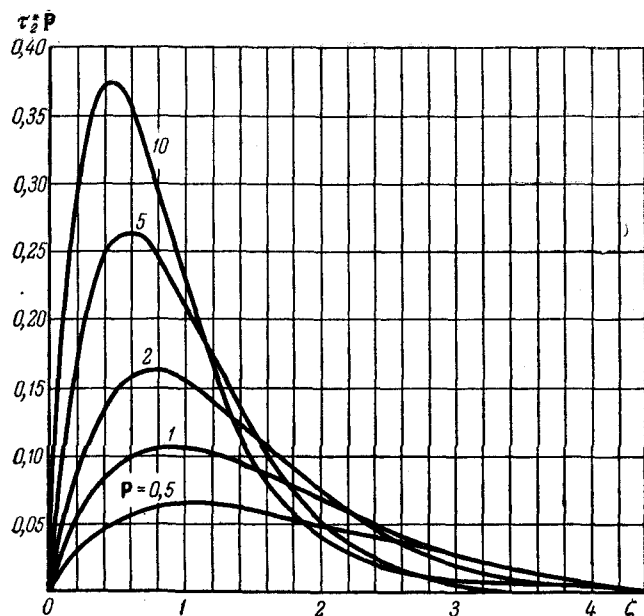


Рис. 27. Распределение безразмерных температур τ_2^* вблизи вращающегося диска (по Мильсенсу и Польгаузену).

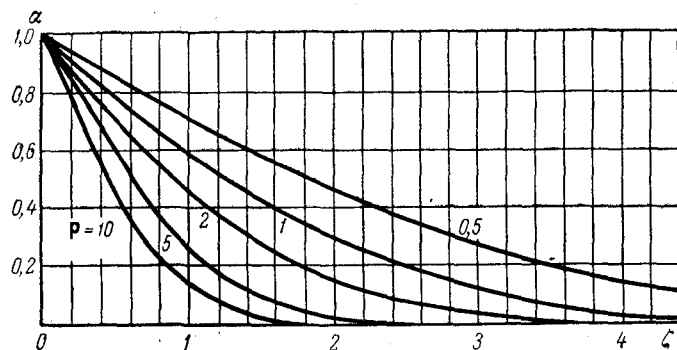


Рис. 28. Распределение безразмерных температур α вблизи вращающегося диска (по Мильсенсу и Польгаузену).

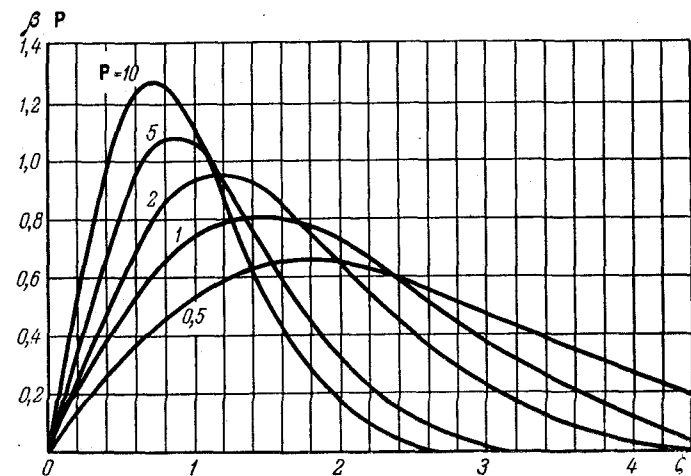


Рис. 29. Распределение безразмерных температур β вблизи вращающегося диска (по Мильсенсу и Польгаузену).

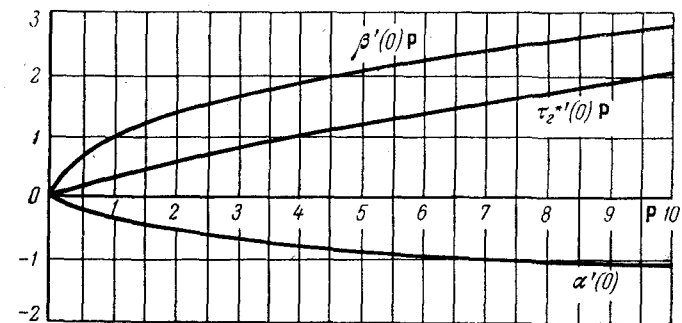


Рис. 30. Влияние числа Прандтля на теплоотдачу вращающегося диска при ламинарном течении (по Мильсенсу и Польгаузену).

Тиффорд замечает¹⁾, что для более общего случая радиального распределения температурного напора по радиусу вращающегося диска

$$T(0) = a_0 + a_2 r^2 + a_4 r^4 + \dots + a_{2n} r^{2n} \quad (5.22)$$

задачу можно решить способом, аналогичным случаю квадратичного распределения температур. Для этого решение разыскивается в виде

$$T = A_0(z) + A_2(z) r^2 + A_4(z) r^4 + \dots + A_{2n}(z) r^{2n}. \quad (5.23)$$

При этом вместо двух уравнений типа (5.2) получается $n+1$ подобных уравнений относительно функций $A_0, A_2, \dots, A_{2n}(z)$.

Метод приближенного расчета теплоотдачи вращающегося диска при произвольном градиенте температурного напора излагается в § 25 настоящей главы.

§ 22. Использование приближенного решения для расчета теплоотдачи вращающегося диска при ламинарном режиме

Используем для расчета теплоотдачи при ламинарном режиме приближенное решение Тарга (§ 5). Пусть температура поверхности диска постоянна:

$$\left. \begin{aligned} T = T_0 \text{ при } z = 0, \\ T = 0 \text{ при } z = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Поскольку для ламинарного режима толщина пограничного слоя и профили безразмерных скоростей не зависят от радиуса, то при постоянной температуре поверхности диска распределение температуры в пограничном слое также можно полагать не зависящим от радиуса, т. е.

$$T = T(z). \quad (5.25)$$

Тогда в соответствии с уравнением (1.7), пренебрегая диссипативными членами, получаем, что $T(z)$ есть решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$a \frac{d^2 T}{dz^2} - v_z \frac{dT}{dz} = 0 \quad (5.26)$$

¹⁾ Tifford A. N., Note on «Heat transfer by laminar flow from a rotating plate», Journal of the Aeron. Sc., 1951, № 8.

при граничных условиях (5.24) ($a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ — температуропроводность).

Это решение выражается с помощью квадратур:

$$T = T_0 \frac{\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{a} \int_0^z v_z dz\right) dz}{\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{a} \int_0^z v_z dz\right) dz}, \quad (5.27)$$

причем

$$T'(0) = - \frac{T_0}{\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{a} \int_0^z v_z dz\right) dz}. \quad (5.28)$$

Используем выражение для осевой скорости $h = v_z$ из формул (2.24) и вычисляем интеграл $\frac{1}{a} \int_0^z v_z dz$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int_0^z v_z dz &= \frac{\delta_{01}}{a} \int_0^\xi v_z d\xi = \\ &= \begin{cases} -4,23 \text{ P} \xi^3 \left(1 - \frac{1}{2} \xi\right) & \text{при } \xi \leq 1, \\ -2,115 \text{ P} \xi & \text{при } \xi \geq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Затем находим значения

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{a} \int_0^z v_z dz\right) dz &= \\ &= \delta_{01} \left\{ \int_0^1 \exp\left[-4,23 \text{ P} \xi^3 \left(1 - \frac{1}{2} \xi\right)\right] d\xi + \frac{1}{2,115 \text{ P}} e^{-2,115 \text{ P}} \right\} \end{aligned} \quad (5.30)$$

для разных значений числа P и вычисляем

$$\text{N} = - \frac{T'(0) r}{T_0}. \quad (5.31)$$

Результаты расчетов хорошо согласуются с вычислениями Мильсепса и Польгаузена (см. рис. 31). В частности, при $P = 0,72$ имеем:

$$\frac{N}{\sqrt{R}} = 0,322,$$

при $P = 1$

$$\frac{N}{\sqrt{R}} = 0,391,$$

что близко также к формуле (5.17).

Профили температур, подсчитываемые по формуле (5.27) на основе выражений (5.29) и (5.30), хорошо согласуются с точными расчетами, а также с опытными данными для воздуха (см. рис. 34 на стр. 116).

§ 23. Аналогия Рейнольдса для теплоотдачи вращающегося диска ($P = 1$)

Гидродинамическая теория теплоотдачи плоской стенки при обтекании ее потоком без продольного градиента скорости основывается на подобии профиля температур в пограничном слое профилю скоростей. Указанное подобие следует из одинакового вида дифференциальных уравнений для скоростей и температур в пограничном слое и подобия граничных условий при постоянстве температурного напора вдоль обтекаемой стенки¹⁾.

Рассмотрим²⁾ уравнение для окружных скоростей осредненного турбулентного течения в пограничном слое вращающегося диска. Оно получается из второго уравнения (1.6) путем отбрасывания вязких членов, малых по сравнению с членами, представляющими производные по нормали к поверхности диска:

$$v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \overline{v'_z v'_\varphi} \right) \quad (5.32)$$

(черточки над осредненными скоростями опущены).

1) «Современное состояние аэродинамики больших скоростей», под ред. Хоуарта, т. II, ИЛ, М., 1956.

2) Дорфман Л. А., Тепловой пограничный слой на вращающемся диске, ДАН СССР, т. 119, № 6, 1958.

Если наряду с ним рассмотреть уравнение энергии (1.8) с исключенными диссипативными членами (т. е. для малых M):

$$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(a \frac{\partial T}{\partial z} - \overline{v'_z T'} \right), \quad (5.33)$$

то из сопоставления уравнений (5.32) и (5.33) нельзя непосредственно усмотреть замеченного для плоского потока подобия профиля температур профилю скоростей.

Такое подобие можно обнаружить в случае, если имеется *квадратичное распределение температурного напора* по радиусу диска:

$$T_{ct} = c_0 r^2, \quad T_\infty = 0. \quad (5.34)$$

Действительно, если обозначить:

$$G(z, r) = \frac{v_\varphi}{r\omega}, \quad \vartheta(z, r) = \frac{T}{c_0 r^2} = \frac{T - T_\infty}{T_{ct} - T_\infty}, \quad (5.35)$$

то после такой замены переменных уравнения (5.32) и (5.33) примут одинаковый вид:

$$\left. \begin{aligned} v_r \frac{\partial G}{\partial r} + 2G \frac{v_r}{r} + v_z \frac{\partial G}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial G}{\partial z} - \overline{v'_z G'} \right), \\ v_r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + 2\vartheta \frac{v_r}{r} + v_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(a \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \overline{v'_z \vartheta'} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

Так как граничные условия у них совпадают:

$$G(0) = \vartheta(0) = 1, \quad G(\infty) = \vartheta(\infty) = 0,$$

то при $P = \frac{\nu}{a} = 1$ получим одинаковые решения этих уравнений:

$$G(z, r) = \vartheta(z, r). \quad (5.37)$$

При этом предполагается одинаковость для v_φ и T соотношений между их осредненными и пульсационными составляющими. Отсюда получаем связь между напряжением трения

$$\tau_\varphi = \mu \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \rho \overline{v'_z v'_\varphi} \quad (5.38)$$

и потоком тепла

$$q = \lambda \frac{\partial T}{\partial z} - \rho c_p \overline{v'_z T'}, \quad (5.39)$$

выражаемую формулой

$$q = c_p \tau_\varphi \frac{T_{\text{от}}}{r\omega}, \quad (5.40)$$

которая представляет собой математическое выражение аналогии Рейнольдса между напряжением трения и потоком тепла для случая вращающегося диска.

Полученный результат охватывает также и случай ламинарного течения, когда нет пульсационных составляющих скорости. Это согласуется с формулой (5.9), которая при неучете диссипации дает $\frac{T}{T_{\text{от}}} = G(\zeta)$.

Соотношение (5.40) дает для местного значения числа $N = \frac{qr}{\lambda T_{\text{от}}}$ и для среднего по радиусу (от 0 до r) числа $N_{\text{ср}} = \frac{q_{\text{ср}} r}{\lambda (T_{\text{от}})_{\text{ср}}}$ формулы:

$$N = R \frac{\tau_\varphi}{\rho (r\omega)^2}, \quad (5.41)$$

$$N_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi} R c_M, \quad (5.42)$$

где $R = \frac{r^2 \omega}{\nu}$ — число Рейнольдса, а c_M — коэффициент момента сопротивления вращающегося диска [формула (2.15)].

Используя решение Кокрэна [формула (2.17)] для ламинарного режима, получим (при $P = 1$) для квадратичного распределения температурных напоров следующие формулы:

$$N_{\text{ср}} = N = 0,616 R^{0,5}. \quad (5.43)$$

Для турбулентного режима, если использовать решение Кармана, то, согласно формулам (4.9) и (4.10), будем иметь:

$$N = 0,0267 R^{0,8}, \quad (5.44)$$

$$N_{\text{ср}} = 0,0232 R^{0,8}. \quad (5.45)$$

Если использовать решение, основанное на логарифмическом профиле скоростей (§ 17), то получим, применив степенные формулы, несколько большие значения этих величин:

$$\left. \begin{aligned} N &= 0,0287 R^{0,8}, \\ N_{\text{ср}} &= 0,0249 R^{0,8}. \end{aligned} \right\} \quad (5.46)$$

§ 24. Влияние числа P при квадратичном распределении температурных напоров¹⁾

а) Ламинарный режим. Поскольку для ламинарного режима профили безразмерных скоростей в пограничном слое не зависят от радиуса (§ 4):

$$\frac{v_\varphi}{r\omega} = G(\zeta), \quad \frac{v_r}{r\omega} = F(\zeta), \quad v_z = H(\zeta) \sqrt{\nu\omega},$$

где

$$\zeta = z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}},$$

то и для температур решение ищем в виде

$$\vartheta(\zeta) = \frac{T}{T_{\text{от}}}. \quad (5.47)$$

Тогда уравнение энергии (5.33) при $T_{\text{от}} = c_0 r^2$ превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\vartheta(\zeta)$:

$$\frac{1}{P} \vartheta'' = H\vartheta' + 2F\vartheta. \quad (5.48)$$

Это уравнение решаем путем последовательных приближений с удовлетворением граничным условиям

$$\vartheta(0) = 1, \quad \vartheta(\infty) = 0. \quad (5.49)$$

Результаты вычислений коэффициентов теплоотдачи можно представить в виде формулы

$$N = (N)_{P=1} \varphi(P) = 0,616 R^{0,5} \varphi(P), \quad (5.50)$$

где значения $\varphi(P)$ изображены на рис. 31. Из рассмотрения этих значений $\varphi(P)$ видно, что влияние числа P на теплоотдачу вращающегося диска более заметно, чем в случае течения около плоской пластинки (для которой это влияние определяется множителем $P^{1/3}$).

б) Турбулентный режим. В случае турбулентного режима для учета влияния числа P при $T_{\text{от}} = c_0 r^2$ можем воспользоваться методом Кармана²⁾.

¹⁾ Дорфман Л. А., Теплоотдача вращающегося диска, Инженерно-физический журнал, т. 1, № 6, 1958.

²⁾ См. сноску ¹⁾ на стр. 104.

Вводим обозначения

$$f(\xi) = \frac{r\omega - v_\varphi}{v_*}, \quad g(\xi) = \frac{T_{ст} - T}{T_*}, \quad (5.51)$$

где

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_\varphi}{\rho}}, \quad T_* = \frac{q}{\rho c_p v_*}, \quad \xi = \frac{zv_*}{\nu}. \quad (5.52)$$

Выражения (5.38) и (5.39) для напряжения трения и потока тепла с использованием понятия коэффициентов турбулентной

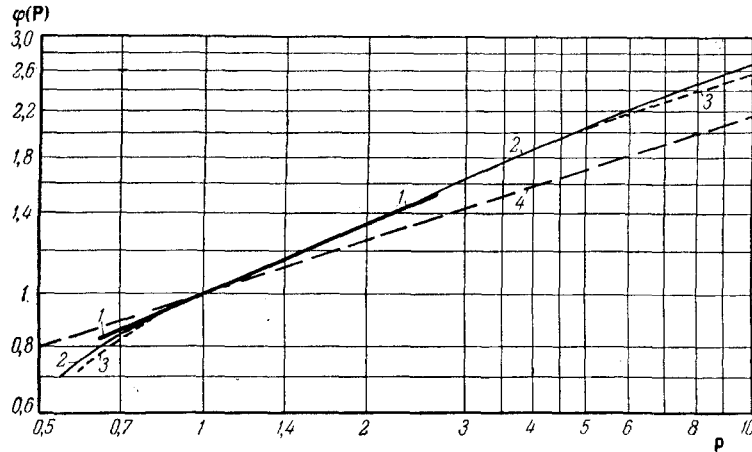


Рис. 31. Коэффициент влияния числа Прандтля на теплоотдачу вращающегося диска при ламинарном режиме: 1 — расчет по уравнению (5.48) для $T_{ст} = c_0 r^2$; 2 — результаты Мильсепса и Польшаузена (см. рис. 30) при $T_{ст} = \text{const}$; 3 — расчет по формуле (5.28) при $T_{ст} = \text{const}$; 4 — расчет по формуле $\varphi(P) = P^{1/2}$ для обтекаемой пластинки.

диффузии (ε) и турбулентной проводимости (ε_T) можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_\varphi}{\rho} &= v_*^2 = (\nu + \varepsilon) \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}, \\ \frac{q}{\rho c_p} &= v_* T_* = (a + \varepsilon_T) \frac{\partial T}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

Тогда, подставив (5.51) и (5.52) в эти уравнения и положив, исходя из подобия механизма переноса тепла и количества движения, $\varepsilon = \varepsilon_T$, получим уравнение связи между

распределениями осредненных температур и скоростей в пограничном слое в виде

$$\frac{1}{g'} - \frac{1}{f'} = \frac{1}{P} - 1, \quad (5.54)$$

где штрихи обозначают дифференцирование по ξ . Исходя, далее, из обычной трехслойной схемы турбулентного пограничного слоя:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \xi, & 0 < \xi < 5 & \quad (\text{ламинарный подслой}), \\ f(\xi) &= -3,05 + 5 \ln \xi, & 5 < \xi < 30 & \quad (\text{переходный слой}), \end{aligned}$$

и учитывая, что при $\xi > 30$ можно пренебречь молекулярными слагаемыми в уравнениях (5.53), будем иметь:

$$g(\xi) = f(\xi) + c.$$

После интегрирования (5.54) получим следующие выражения для профиля температур:

$$\left. \begin{aligned} g(\xi) &= P\xi, & 0 < \xi < 5, \\ g(\xi) &= 5 \ln \left(\frac{P}{5} \xi + 1 - P \right) + 5P, & 5 < \xi < 30, \\ g(\xi) &= f(\xi) + \sum(P), & \xi > 30, \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

где

$$\sum(P) = 5(P - 1) + 5 \ln \frac{5P + 1}{6}. \quad (5.56)$$

На внешней границе пограничного слоя $v_\varphi = 0$, $T = T_\infty$, так что из последнего уравнения (5.55) будем иметь:

$$\frac{T_{ст} - T_\infty}{T_*} = \frac{r\omega}{v_*} + \sum(P),$$

откуда для

$$N = \frac{v_* T_*}{r\omega (T_{ст} - T_\infty)} PR \quad (5.57)$$

находим следующее выражение:

$$N = (N)_{P=1} \varphi(P) = \frac{\frac{\tau_\varphi}{(r\omega)^2 \rho} PR}{1 + \sqrt{\frac{\tau_\varphi}{(r\omega)^2 \rho} \left[5(P - 1) + 5 \ln \frac{5P + 1}{6} \right]}}. \quad (5.58)$$

Воспользовавшись формулой (4.9) для $\frac{\tau_{\varphi}}{\rho(r\omega)^2}$, получим отсюда для воздуха ($P = 0,72$) при квадратичном распределении температурных напоров по радиусу диска зависимость $N = f(R)$, которую достаточно точно можно выразить формулой

$$N = 0,0217 R^{0,8}. \quad (5.59)$$

С другой стороны, вычисления значений N по формуле (5.58) для $R = 10^6$ показывают, что зависимость от числа P для турбулентного режима можно приближенно оценить множителем $P^{0,6}$, т. е.

$$\varphi(P) \approx P^{0,6}. \quad (5.60)$$

Заметим, что, как и для ламинарного режима, число P оказывает на теплоотдачу вращающегося диска *более заметное влияние*, чем при теплоотдаче плоской пластины.

§ 25. Расчет теплоотдачи при произвольном распределении температурных напоров по радиусу ¹⁾

Для определения влияния радиального градиента температур выведем интегральное соотношение энергии. Составим баланс тепла для кольцевого элемента теплового пограничного слоя толщины δ_T и ширины dr . Секундный поток тепла в радиальном направлении через этот элемент

$$c_p \rho d \left(\int_0^{\delta_T} 2\pi r v_r T dz \right)$$

уравновешивается теплоотдачей с поверхности диска в кольцевой полосе с площадью $2\pi r dr$:

$$2\pi q r dr.$$

Отсюда получаем без учета диссипации искомое интегральное соотношение

$$c_p \rho \frac{d}{dr} \left(\int_0^{\delta_T} r v_r T dz \right) = r q. \quad (5.61)$$

¹⁾ См. сноску ²⁾ на стр. 104.

Введя условную толщину потери теплосодержания

$$\delta_T^{**} = \int_0^{\delta_T} \frac{v_r T}{r \omega T_{ct}} dz \quad (5.62)$$

(температуру на внешней границе пограничного слоя полагаем равной нулю), можем преобразовать (5.61) к виду:

$$\frac{d\delta_T^{**}}{dr} + \delta_T^{**} \eta = \frac{N}{PR}, \quad \eta = \frac{T'_{ct}}{T_{ct}} + \frac{2}{r}, \quad (5.63)$$

или

$$\frac{d}{dr} (R_T^{**} r T_{ct}) = \frac{N}{P} T_{ct}, \quad R_T^{**} = \frac{r \omega}{v} \delta_T^{**}. \quad (5.64)$$

Отметим что при этом N_{cp} для данного радиуса будет равно

$$N_{cp} = 2PR_T^{**} \frac{T_{ct}(r)}{T_{cp}(r)}. \quad (5.65)$$

Для расчета теплоотдачи с помощью (5.64) при произвольном градиенте температур используем идею об однопараметричности семейства профилей температур, подобно тому как это делается в методе Л. Г. Лойцянского ¹⁾ расчета динамического пограничного слоя на криволинейных поверхностях.

Заметим, что применение метода Л. Г. Лойцянского позволило успешно решить задачу по определению теплоотдачи криволинейных поверхностей при наличии продольного градиента скоростей ²⁾.

Полагаем, что в рассматриваемом случае определяющий параметр f_T представим в виде

$$f_T = \eta \delta_T^{**} G_T(R_T^{**}; P), \quad (5.66)$$

¹⁾ Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, Физматгиз, 1959.

²⁾ Скопец М. Б., Приближенный метод расчета турбулентного пограничного слоя при наличии теплообмена, Журнал техн. физики, т. XXV, № 5, 1955; Моложен-Зысина Л. М., Приближенный метод расчета теплоотдачи в решетках профилей, Изв. АН СССР, ОТН, № 10, 1957.

где $G_T(\mathbf{R}_T^{**}; \mathbf{P})$ — универсальная (независимая от η) функция степенного вида:

$$G_T = A_T(\mathbf{P})(\mathbf{R}_T^{**})^m \quad (5.67)$$

и

$$\chi = \frac{N}{PR} G_T(\mathbf{R}_T^{**}; \mathbf{P}) \quad (5.68)$$

есть функция этого параметра.

Умножая обе части уравнения (5.64) на G_T и проведя несложные выкладки¹⁾, получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно формпараметра f_T :

$$\frac{df_T}{d\eta} = f_T \left(\frac{\eta'}{\eta} + \frac{m}{r} \right) + F_T \eta, \quad (5.69)$$

$$\eta' = \frac{d\eta}{dr}, \quad F_T = (m+1)(\chi - f_T). \quad (5.70)$$

Так как по предположению G_T не зависит от η , то ее вид легко получим по известному из § 23 решению для случая $T_{ст} = c_0 r^2$, нормируя χ так, чтобы в указанном случае $\chi = 1$. Как и для течения вблизи плоской стенки, можем полагать, что функция F_T сохранит свой вид

$$F_T = (m+1)(1 - f_T) \quad (5.71)$$

для широкого класса распределений $T_{ст}(r)$. Тогда из уравнения (5.69) будем иметь:

$$f_T = \eta T_{ст}^{-(m+1)} r^{-(m+2)} \left[(m+1) \int_0^r T_{ст}^{m+1} r^{m+2} dr + C \right], \quad (5.72)$$

где $C = 0$ из условия конечности f_T при $T_{ст} = c_0 r^2$ для $r = 0$.

В результате получим для \mathbf{R}_T^{**} формулу

$$(\mathbf{R}_T^{**})^{m+1} = \frac{m+1}{A_T} R T_{ст}^{-(m+1)} r^{-(m+3)} \int_0^r T_{ст}^{m+1} r^{m+2} dr. \quad (5.73)$$

Значения A_T и m получим, если учтем, что при $T_{ст} = c_0 r^2$ формула (5.68) дает

$$G_T = \frac{RP}{N},$$

¹⁾ См. сноску ¹⁾ на стр. 111.

а из (5.65) будем иметь:

$$N_{ср} = 4PR_T^{**}.$$

Тогда, согласно формулам (5.44), (5.45) и (5.67), найдем, что для турбулентного режима

$$m = \frac{1}{4}, \quad A_T = 135,8 \left[\frac{P}{\varphi(P)} \right]^{\frac{5}{4}}. \quad (5.74)$$

В то же время для ламинарного режима, используя формулы (5.43), получим:

$$m = 1, \quad A_T = 10,52 \left[\frac{P}{\varphi(P)} \right]^2. \quad (5.75)$$

Определив по формуле (5.73) величину \mathbf{R}_T^{**} для заданного распределения температурных напоров, можем вычислить $N_{ср}$ по формуле (5.65), а затем и N из соотношения

$$N = N_{ср} + \frac{1}{T_{ст}} \left(\int_0^r T_{ст} r dr \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{N_{ср}}{r} \right). \quad (5.76)$$

При этом получается, что влияние числа P определяется тем же множителем $\varphi(P)$, что и для квадратичного распределения температурных напоров.

§ 26. Сравнение приближенного решения с точным

Для выяснения степени точности приближенного решения, полученного в предыдущем параграфе, сопоставим его для случая степенных распределений температур $T_{ст} = c_0 r^n$ с точным решением для ламинарного режима.

С применением обозначений, принятых в § 23, в этом случае уравнение энергии (5.33) примет при $P = 1$ вид

$$\vartheta'' = H\vartheta' + nF\vartheta. \quad (5.77)$$

Это уравнение решалось для различных значений n методом последовательных приближений с удовлетворением граничным условиям

$$\vartheta(0) = 1, \quad \vartheta(\infty) = 0.$$

На рис. 32 представлен результат расчета профилей температур для разных n . С увеличением n градиент

температур вблизи поверхности диска увеличивается, т. е. теплоотдача возрастает.

В таблице 9 сопоставлены значения коэффициентов $\frac{N}{\sqrt{R}} = -\vartheta'(0)$ для точного решения и для приближенного,

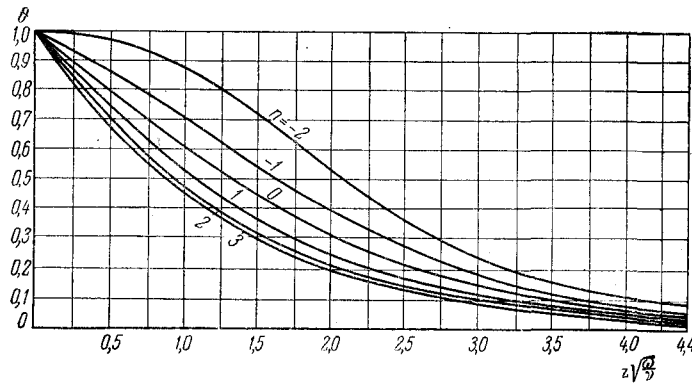


Рис. 32. Профили температур в пограничном слое вращающегося диска при $T_{ст} = c_0 r^n$ для разных n (ламинарный режим течения).

полученного по формулам (5.73) и (5.65). Нетрудно определить, что приближенное решение дает

$$N = N_{ср} = 0,308 \sqrt{|n + 2|} R^{0,5}. \quad (5.78)$$

Близость приближенных значений к точным свидетельствует об эффективности приближенного метода.

Таблица 9

Значения коэффициентов $\frac{N}{\sqrt{R}} = -\vartheta'(0)$ для теплоотдачи вращающегося диска при степенных распределениях температуры диска по радиусу $T_{ст} = c_0 r^n$

n	-2	-1	0	1	2	3
Точное решение . . .	-0,015	0,25	0,399	0,52	0,616	0,680
По формуле (5.78) . .	0	0,308	0,436	0,533	0,616	0,688

С другой стороны, при постоянстве температурного напора по радиусу диска можно сопоставить влияние числа P , определенное Мильсепсом и Польгаузеном (§ 21) численным решением уравнения энергии, с результатом расчетов приближенным методом. Согласно последнему, это влияние определяется множителем $\varphi(P)$, найденным для случая $T_{ст} = c_0 r^2$. Как видно (рис. 31), имеется хорошее совпадение указанных величин, что также служит подтверждением правильности приближенного метода.

§ 27. Сравнение с опытными данными

Опытные данные по теплоотдаче вращающегося диска имеются лишь для воздушной среды ($P = 0,72$) при постоянстве температурного напора. Они изображены на рис. 33,

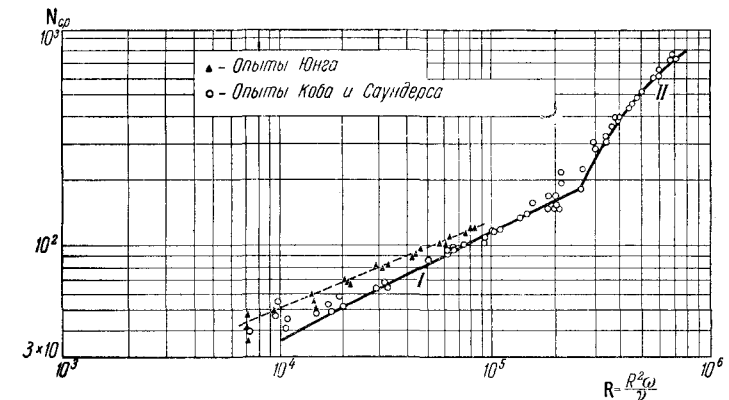


Рис. 33. Теплоотдача диска, вращающегося в воздушной среде при $T_{ст} = \text{const}$: I — по формуле (5.81) для ламинарного режима; II — по формуле (5.83) с учетом ламинарного участка.

где нанесены также кривые, соответствующие расчетным значениям.

В ламинарной области при $P = 0,72$, согласно рис. 31, $\varphi(P) = 0,86$. Поэтому для $n = 0$, по точному решению (таблица 9) будем иметь для воздуха

$$N = N_{ср} = 0,343 R^{0,5}. \quad (5.79)$$

Если же воспользоваться приближенным решением, то получим:

$$N = N_{\text{ср}} = 0,374R^{0,5}. \quad (5.80)$$

Опытные данные Коба и Саундерса¹⁾ для ламинарного течения дают близкие значения и хорошо описываются формулой

$$N = N_{\text{ср}} = 0,36R^{0,5}. \quad (5.81)$$

Заметим, что результаты Юнга²⁾ дают более высокие значения коэффициентов теплоотдачи, что связано с горизонталь-

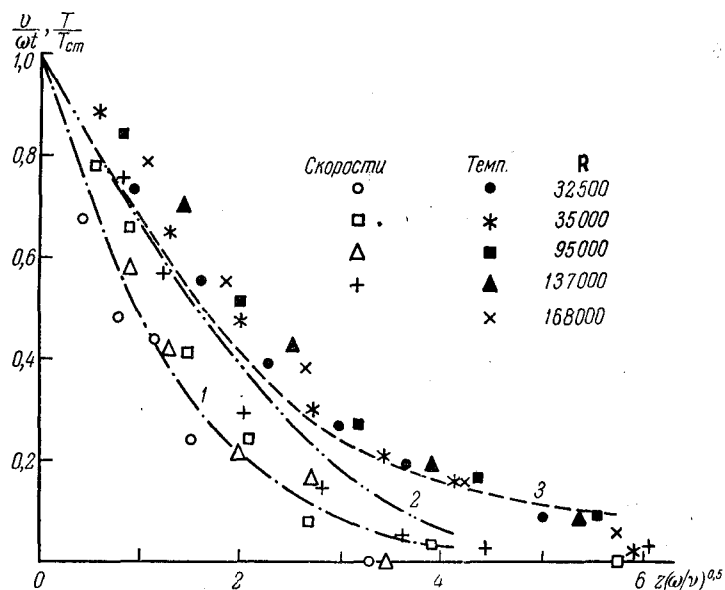


Рис. 34. Профили температур и скоростей вблизи вращающегося в воздушной среде диска ($R=101,5$ мм) при ламинарном режиме течения и $T_{\text{ст}}=\text{const}$: 1 — касательная скорость по расчету Кокрэна; 2 — распределение температур по расчетам Мильсенса и Польгаузена; 3 — расчет по формуле (5.27) для $Pr=0,72$. Опытные точки — по замерам Коба и Саундерса.

ным расположением диска, при котором заметно сказывается естественная конвекция.

¹⁾ C o b b E. C. and S a u n d e r s O. A., Heat transfer from a rotating disc, Proc. Roy. Soc., ser. A, т. 236, № 1206, 1956.

²⁾ Young R. L., Heat transfer from a rotating plate, Trans, of ASME, т. 78, № 6, 1956.

Расчетные значения для турбулентного режима получаются из формул (5.73) и (5.60). При степенном распределении температур по радиусу диска $T_{\text{ст}} = c_0 r^n$ получим:

$$N = N_{\text{ср}} \frac{n+2,6}{n+2} = 0,0197(n+2,6)^{0,2} R^{0,8} Pr^{0,6}. \quad (5.82)$$

При постоянной температуре диска ($n=0$) для воздуха ($Pr=0,72$) получаем:

$$N_{\text{ср}} = 0,0151 R^{0,8}, \quad N = 0,0196 R^{0,8}. \quad (5.83)$$

Подсчет по этим формулам с учетом ламинарного участка на диске [по формуле (5.81) до $R=3 \cdot 10^5$] дает хорошее соответствие с опытными данными Коба и Саундерса (рис. 33).

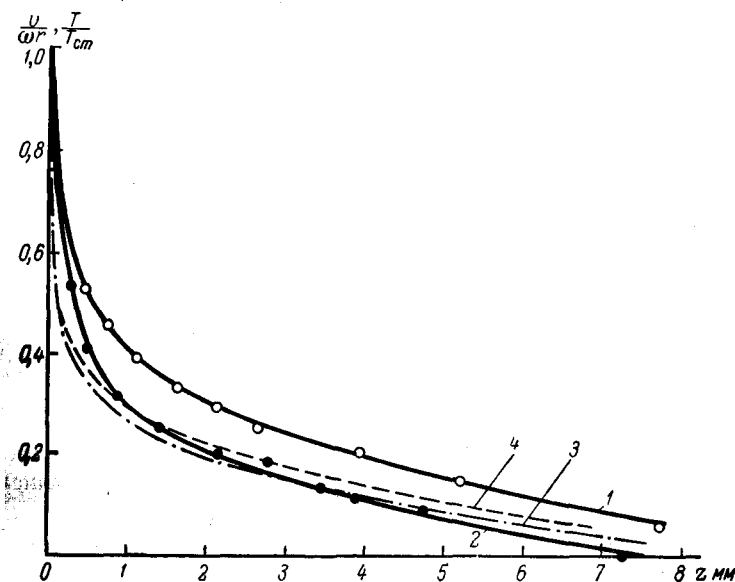


Рис. 35. Профили скоростей вблизи диска, вращающегося в воздушной среде при турбулентном режиме течения и $T_{\text{ст}}=\text{const}$, $R=228$ мм, $n=1235$ об/мин, $R=444$ 000: 1 — профиль температур по замерам Коба и Саундерса; 2 — профиль полной касательной скорости по Кобу и Саундерсу; 3 — окружная скорость по формуле Кармана; 4 — полная касательная скорость по расчету Кармана.

В цитируемой работе Коба и Саундерса приведены также результаты замеров профилей температур и скоростей в пограничном слое нагретого вращающегося диска диаметром 457 мм.

При постоянной температуре поверхности диска профили скоростей и температур неподобны между собой (рис. 34 и 35). Это можно объяснить в соответствии со сказанным в § 23 и 24 неквадратичным распределением температурных напоров по радиусу диска, а также тем, что $P \neq 1$.

Для ламинарного режима рядом с опытными данными для воздуха ($P = 0,72$) нанесено теоретическое распределение температур по расчетам Мильсепса и Польгаузена (см. § 21), а также результаты вычислений по формулам (5.26) — (5.30). Последние лучше согласуются с опытными данными для больших значений ζ .

§ 28. Влияние обдува диска на теплоотдачу

При обдуве диска осесимметричным потоком (2.29), как нетрудно заметить, соблюдаются все условия, указанные в § 23, которые при квадратичном распределении температурного напора по радиусу диска обеспечивают осуществление аналогии Рейнольдса и справедливость формулы (5.41) при $P = 1$.

Влияние обдува сказывается через увеличение трения (§ 6)

$$\tau_{\varphi} = (\tau_{\varphi})_{a=0} \Lambda \left(\frac{a}{\omega} \right).$$

Тогда в соответствии с формулой (5.41) будем иметь:

$$N = (N)_{a=0} \Lambda \left(\frac{a}{\omega} \right). \quad (5.84)$$

Аналогичными рассуждениями можно убедиться, что при равномерном отсосе по поверхности диска (§ 8) вместе с ростом окружной компоненты трения τ_{φ} с возрастанием отсоса будет также расти коэффициент теплоотдачи.

ГЛАВА VI

ТЕЧЕНИЕ ВОКРУГ ДИСКА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В ОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 29. Вращение диска в очень узком кожухе

Рабочие колеса турбомашин обычно вращаются в узких цилиндрических камерах. В этом случае гидродинамика потока существенно отличается от течения вокруг диска в неограниченном пространстве. Окружная скорость среды, вращающейся вместе с диском, уже не равна нулю на внешней границе пограничного слоя диска. Если вблизи диска радиальное течение направлено от центра, то около стенок кожуха радиальная скорость направлена к центру. Картины течения в меридиональном сечении для некоторых случаев представлены на рис. 37 и 44.

При очень малой ширине зазора s между диском и кожухом, когда исчезают отдельные пограничные слои на стенках, распределение окружных скоростей имеет характер, сходный с распределением скоростей при течении Куэтта.

При числе $R = \frac{r^2 \omega}{\nu} < 10^5$ имеет место ламинарное течение Куэтта с линейным профилем скоростей. Касательное напряжение трения на расстоянии r от оси будет равно

$$\tau_{\varphi} = \frac{r \omega \mu}{s}, \quad (6.1)$$

а момент сил трения одной стороны диска радиуса R получится равным

$$M = 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr = \frac{\pi}{2} \frac{\omega \mu R^4}{s}. \quad (6.2)$$

Для коэффициента момента трения, определяемого формулой (2.15), получим выражение

$$c_M = 2\pi \frac{R}{s} \frac{1}{R}. \quad (6.3)$$

На рис. 36 эта формула для случая $s/R = 0,02$ изображена кривой 1, которая примерно до $R = 10^4$ хорошо совпадает с измерениями Цумбуша¹⁾. Шульц-Грунов²⁾ показал, что и для уточненного решения сохраняется формула (6.3), а Су³⁾ нашел, что она справедлива также для случая наличия небольших протечек в зазоре между диском и кожухом. Для больших зазоров Су дает поправочный множитель, уменьшающий момент трения.

При больших числах Рейнольдса течение в зазоре становится турбулентным. Если при этом еще не появляются отдельные пограничные слои на стенках диска и кожуха, то для определения сил трения естественно применить соответствующие соотношения для турбулентного течения Куэтта (см. § 44). Возьмем формулу (7.87) из § 44, понимая в ней под v_1 окружную скорость диска на данном радиусе, а под v_{*1} соответствующую динамическую скорость $v_{*1} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$. Тогда, аппроксимируя эту формулу в области чисел Рейнольдса от $R_s = 10^4$ до $R_s = 10^6$ степенной зависимостью от R_s , найдем следующее выражение для коэффициента момента трения:

$$c_M = 0,0277R^{-0,2} \left(\frac{s}{R}\right)^{-0,2}. \quad (6.4)$$

Полученное соотношение согласуется с данными экспериментов, которые описаны в статье Пантелла⁴⁾. Разумеется, оно применимо лишь для определенной области чисел Рейнольдса, когда еще не появились отдельные пограничные слои на стенках диска и кожуха.

¹⁾ Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, ИЛ, 1956.

²⁾ Schultz-Grunow F., Der Reibungswiderstand rotieren der Scheiben in Gehäusen, ZAMM, т. 15, № 4, 1935.

³⁾ Soo S. L., Laminar flow over an enclosed rotating disk. Trans. ASME, т. 80, № 2, 1958.

⁴⁾ Pantell K., Versuche über Scheibenreibung, Forschun a. d. Geb. d. Ingwes., т. 16, № 4, 1949—1950.

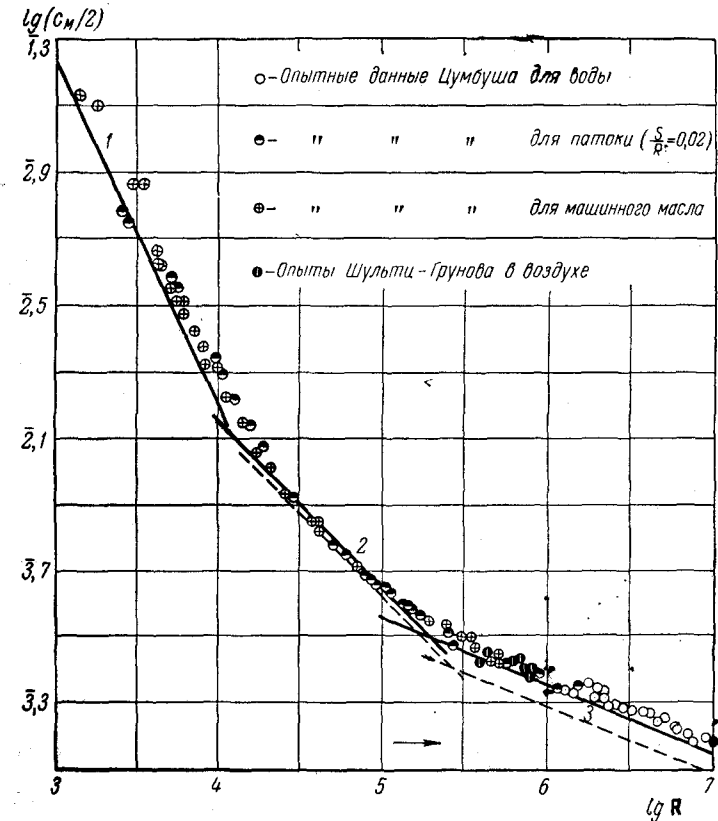


Рис. 36. Сопротивление трения диска, вращающегося в кожухе. Кривая 1 по формуле (6.3); кривая 2 (сплошная) — по формуле Окайа — Хасегава (6.24); кривая 2 (пунктир) — по расчету Шульц-Грунова для ламинарного режима (без учета разности между радиусами диска и кожуха); кривая 3 (сплошная) — по формуле Окайа — Хасегава (6.33); кривая 3 (пунктир) — по расчету Шульц-Грунова для турбулентного режима (без учета разности между радиусами диска и кожуха).

§ 30. Ламинарное течение между вращающимися и неподвижными дисками неограниченных размеров

Стюартсон¹⁾, а также Гроне²⁾ рассматривали задачу о течении между двумя неограниченными пластинами, отстоящими друг от друга на расстоянии s , из которых одна вращается, а другая неподвижна.

Первоначально решение поставленной задачи было качественно рассмотрено Бэтчелором³⁾.

Для тождественного удовлетворения уравнению неразрывности вводится функция тока ψ , так что

$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (6.5)$$

Тогда если еще ввести функции $f\left(\frac{z}{s}\right)$ и $G\left(\frac{z}{s}\right)$ такие, что

$$\psi = \omega s r^2 f\left(\frac{z}{s}\right), \quad v_\varphi = r \omega G\left(\frac{z}{s}\right), \quad (6.6)$$

то получим из третьего уравнения системы (1.1) выражение для давления в виде

$$\frac{p}{\rho} = \omega^2 r^2 E + 2\omega^2 s^2 \left(-f^2 + \frac{f'}{R}\right), \quad R = \frac{\omega s^2}{\nu}, \quad (6.7)$$

а первые два уравнения системы (1.1) превратятся в два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} f''' + 2ff'' + (f')^2 - G^2 + 2E &= 0, \\ \frac{1}{R} G'' - 2G'f + 2Gf' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

где штрихи обозначают дифференцирование по $\zeta = z/s$.

¹⁾ Stewartson K., On the flow between two rotating coaxial discs Proc. Cambr. Philos. Soc., т. 49, № 2, 1953.

²⁾ Grohne D., Über die laminare Strömung in einer kreiszylindrischen Dose mit rotierendem Deckel, Nachrichten Acad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Klasse, № 12, 1955.

³⁾ Batchelor G. K., Note on a class solutions of the Navier—Stokes equations representing steady rotationally—symmetric flow, Quart. Journ. Mech. appl. Mathem., т. 4, № 1, 1951.

Граничные условия задачи будут:

$$\left. \begin{aligned} \text{на неподвижном диске } (\zeta = 0) \\ f(0) = f'(0) = 0, \quad G(0) = 0, \\ \text{на вращающемся диске } (\zeta = 1) \\ f(1) = f'(1) = 0, \quad G(1) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

При не очень больших числах R можно, по Стюартсону, решение разложить в ряд по числам R :

$$\left. \begin{aligned} f(\zeta) &= Rf_1(\zeta) + R^3f_3(\zeta) + R^5f_5(\zeta) + \dots, \\ G(\zeta) &= g_0(\zeta) + R^2g_2(\zeta) + R^4g_4(\zeta) + \dots, \\ E &= E_0 + R^2E_2 + R^4E_4 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

где функции f_n и g_n удовлетворяют граничным условиям (6.9). Подстановка (6.10) в уравнения (6.8) дает, по Гроне, следующее решение:

$$\left. \begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{R}{60} (\zeta^5 - 3\zeta^3 + 2\zeta^2) + \dots, \\ G(\zeta) &= \zeta - \frac{R^2}{180} \left(\frac{4}{7} \zeta^7 - \frac{9}{5} \zeta^5 + \zeta^4 - \frac{8}{35} \zeta \right) + \dots, \\ E &= \frac{3}{20} - \left(\frac{R}{100} \right)^2 \cdot 3,829 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Для весьма больших чисел R получается, по Бэтчелору, течение с образованием пограничных слоев на стенках и вращающемся как твердое тело ядром. Течение в меридиональной плоскости принимает вид, указанный на рис. 37.

Ряды (6.11) сходятся до $R \approx 20$, а модель Бэтчелора действует при $R > 1000$. Поэтому Гроне развивает иной метод расчета при умеренных числах R . Результаты расчетов изображены на рис. 38, 39 и 40. Как видно, для очень малых значений R справедливо допущение о линейности профиля окружных

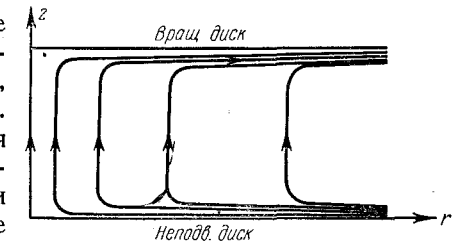
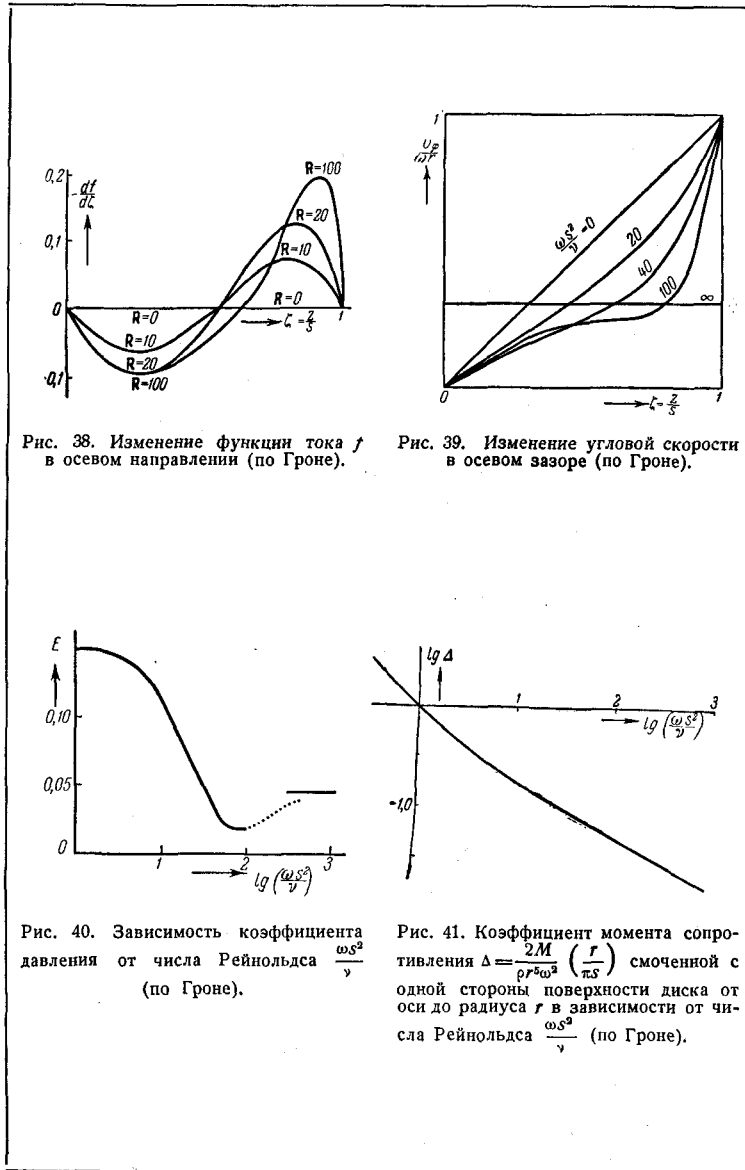


Рис. 37. Схема линий тока для больших чисел Рейнольдса и неограниченных дисков (по Бэтчелору).



§ 31] ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ НАД НЕПОДВИЖН. ОСНОВАН. 125

скоростей и отсутствии радиальных составляющих, т. е. те допущения, которые легли в основу вывода формулы (6.3).

На рис. 41 представлены подсчитанные Гроне значения коэффициента момента сопротивления смоченной с одной стороны поверхности диска.

Заметим, что Стюартсон отрицает вывод Бэтчелора об образовании пограничного слоя на неподвижной стенке при больших числах R и приводит некоторые соображения в обоснование своего утверждения¹⁾. В то же время из расчетов Гроне следует (см. рис. 39), что предсказание Бэтчелора оправдано.

§ 31. Вращательное движение жидкости над неподвижным основанием

Для выяснения характера течения вблизи неподвижной стенки при больших числах Рейнольдса рассмотрим задачу о вращательном движении жидкости над неподвижным основанием. В случае вращения жидкости над неподвижным основанием (полагаем его расположенным горизонтально) для частиц, находящихся вдали от стенки, центробежная сила и радиальный градиент давления взаимно уравновешиваются. Для частиц жидкости, находящихся вблизи стенки, окружная скорость благодаря торможению уменьшается, центробежная сила еще более значительно уменьшается, в то время как радиальный градиент давления остается тем же, что и вдали от стенки. В результате этого возникает радиальное течение вблизи стенки, направленное внутрь, к оси вращения. Это радиальное течение в свою очередь вследствие условия неразрывности вызывает восходящее течение в осевом направлении.

На большом расстоянии от стенки, где отсутствует трение, имеем:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v_\varphi^2}{r},$$

и так как $v_\varphi = r\omega$, то

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = r\omega^2, \quad (6.12)$$

¹⁾ Интересен комментарий Мура по поводу этой дискуссии в обзорной статье о пространственном пограничном слое, помещенной в сборнике «Advances in Applied Mechanics», т. IV, 1956.

Решая задачу в рамках теории пограничного слоя, примем, что этот градиент давления существует по всему сечению пограничного слоя. Подставив это выражение в систему уравнений (1.1) и применив подстановку (2.6), получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} F^2 - G^2 + HF' - F'' + 1 &= 0, \\ 2GF + HG' - G'' &= 0, \\ 2F + H' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Граничные условия задачи примут вид:

$$\left. \begin{aligned} F = G = H = 0 \quad \text{при } \zeta = 0, \\ F = 0, \quad G = 1 \quad \text{при } \zeta = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

У. Бедеват¹⁾ решил систему (6.13), представив подобно Кокрэну функции F , G и H в виде степенных рядов вблизи $\zeta = 0$ и в виде асимптотических разложений для $\zeta = \infty$. Путем кропотливых вычислений им были найдены значения искомых функций, которые приведены в таблице 10 и графически изображены на рис. 42. Полярная диаграмма, изображенная на рис. 43, представляет изменение результирующей горизонтальной скорости v с составляющими v_r и v_φ . Угол между вектором v и окружным направлением зависит от безразмерной высоты ζ над основанием. Наибольшее отклонение от окружного направления имеется вблизи стенки: оно равно $50,6^\circ$ и направлено внутрь. Наибольшее отклонение наружу, равное $7,4^\circ$, получается на высоте $\zeta = 4,63$. Любопытно также, что осевая составляющая v_z есть функция только от ζ , но не зависит от расстояния r от оси вращения, причем всюду $v_z > 0$, т. е. имеется восходящее движение, затухающее вдали от основания.

Полное количество жидкости, протекающей к оси вращения через поверхность цилиндра радиуса R , равно

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi R \int_{z=0}^{\infty} v_z dz = 2\pi R^2 \sqrt{\omega\nu} \int_0^{\infty} F(\zeta) d\zeta = \\ &= -\pi R^2 \sqrt{\omega\nu} H(\infty) = -1,349\pi R^2 \sqrt{\omega\nu}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

¹⁾ B e d e w a d t U., Drehströmung über festem Grunde, ZAMM, т. 20, 1940.

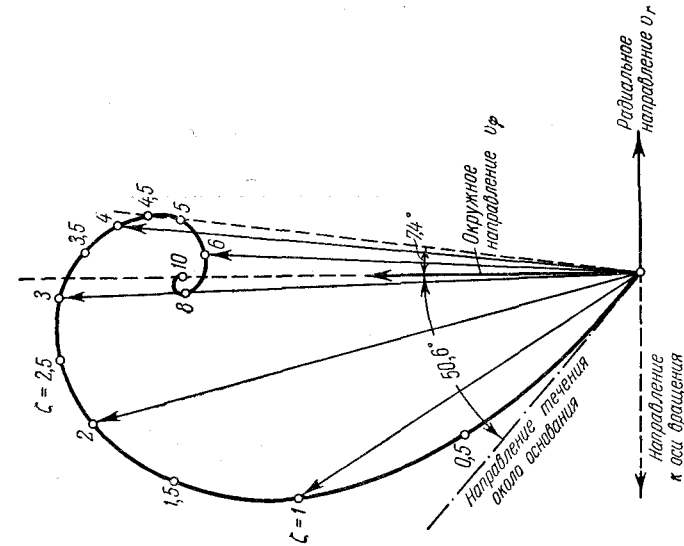


Рис. 43. Полярная диаграмма горизонтальной составляющей скорости в пограничном слое, образующемся при вращении жидкости вблизи неподвижного основания (по Бедевату).

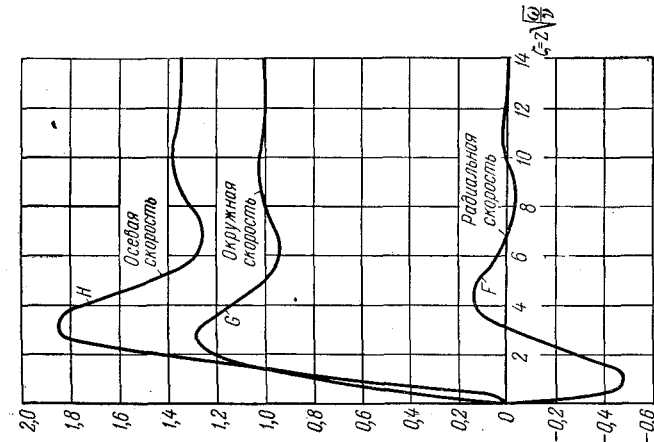


Рис. 42. Распределение скоростей в пограничном слое, образующемся при вращении жидкости вблизи неподвижного основания (по Бедевату).

Столько же жидкости поднимается вверх в осевом направлении. Наибольшее значение скорость восходящего

Таблица 10

Значения функций F , G , H , определяющих распределение скоростей при вращательном движении жидкости над неподвижным основанием (по Бедевадту)

ζ	F	G	H
0	0	0	0
0,5	-0,349	0,383	0,194
1,0	-0,484	0,736	0,624
1,5	-0,450	1,014	1,099
2,0	-0,329	1,193	1,493
2,5	-0,176	1,272	1,746
3,0	-0,036	1,272	1,849
3,5	0,067	1,218	1,830
4,0	0,123	1,141	1,732
4,5	0,137	1,064	1,599
5,0	0,121	1,002	1,468
5,5	0,088	0,961	1,362
6,0	0,050	0,943	1,294
6,5	0,016	0,942	1,261
7,0	-0,008	0,953	1,258
7,5	-0,022	0,969	1,275
8,0	-0,027	0,986	1,300
8,5	-0,024	0,999	1,326
9,0	-0,018	1,008	1,347
9,5	-0,010	1,012	1,361
10,0	-0,003	1,012	1,368
10,5	0,002	1,010	1,368
11,0	0,005	1,007	1,365
11,5	0,006	1,003	1,359
12,0	0,005	1,000	1,354
12,5	0,004	0,998	1,349
∞	0	1	1,349

движения имеет на высоте $\zeta = 3,31$, где она равна

$$v_z = 1,853 \sqrt{\nu \omega}. \quad (6.16)$$

Заметим, что толщина пограничного слоя в рассматриваемом случае значительно больше, чем при вращении диска в покоящейся жидкости. Если за толщину δ погранич-

§ 31 ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ НАД НЕПОДВИЖН. ОСНОВАН. 199

ного слоя принять такую высоту, на которой безразмерная относительная окружная скорость составляет 2% от 1,

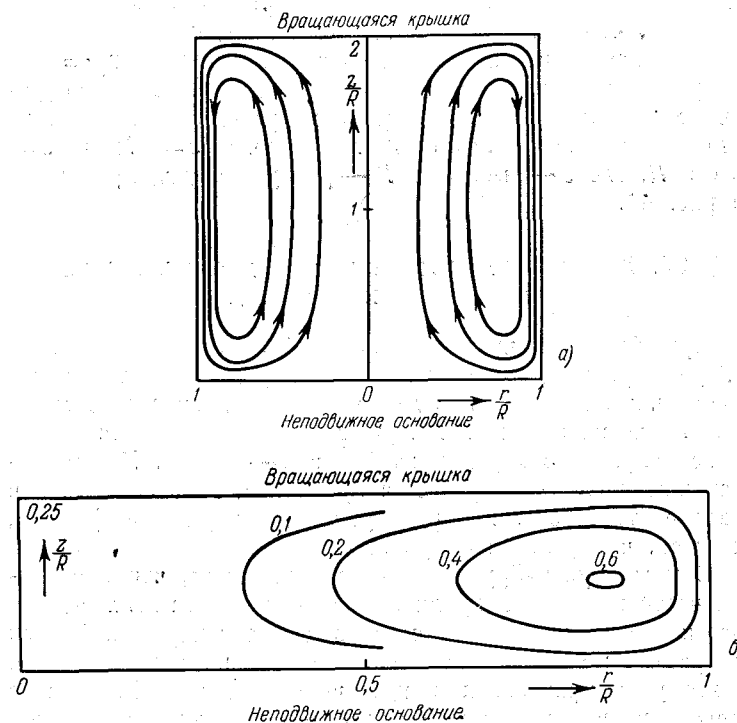


Рис. 44. Линии тока в меридиональной плоскости при вращении плоской крышки кругового цилиндрического сосуда, наполненного жидкостью: а) при $s=2R$; б) при $s=0,25R$ (по Гроне).

то для случая вращения жидкости над неподвижным основанием найдем:

$$\delta = 8 \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}.$$

Для случая вращения диска в покоящейся жидкости соответствующая толщина равняется

$$\delta = 4 \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}.$$

Гроне¹⁾ разобрал задачу о ламинарном течении жидкости в круговом цилиндрическом сосуде с плоским неподвижным основанием и вращающейся плоской крышкой. Он пришел к выводу, что для решения задачи нужно выделить потенциальное ядро течения в виде потенциального вихря $v_\varphi = B/r$, которое нужно непрерывно сростить с течением в пограничных слоях у стенок. Примеры расчетов линий тока в меридиональной плоскости для случая $s=2R$ и $s=0,25R$, где s —высота, а R —радиус сосуда, приводятся на рис. 44.

§ 32. Ламинарное течение вокруг диска в кожухе при больших числах R

При больших числах Рейнольдса и достаточном осевом зазоре Шульц-Грунов²⁾ наблюдал образование отдельных пограничных слоев на диске и неподвижных стенках цилиндрического кожуха. При этом радиальное течение на диске направлено наружу, на стенках—внутрь. Между пограничными слоями образуется прослойка, вращающаяся как твердое тело с некоторой угловой скоростью $\beta = \omega/\xi$, меньшей, чем угловая скорость ω .

Опыты Шульц-Грунова показывают также, что в основной части потока между диском и кожухом, за исключением участков вблизи цилиндрического обода кожуха и вблизи центра, осевые составляющие скорости близки к нулю ($v_z=0$). Поэтому в уравнениях пограничного слоя (4.53) можно пренебречь членами, в которых имеется множитель v_z .

Проинтегрировав эти уравнения вдоль толщины пограничного слоя, получим после умножения на r следующие интегральные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \rho r \int_0^\delta v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} dz - \rho \int_0^\delta v_\varphi^2 dz &= - \int_0^\delta r \frac{\partial p}{\partial r} dz - r\tau_r, \\ \rho r \int_0^\delta v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} dz + \rho \int_0^\delta v_r v_\varphi dz &= - r\tau_\varphi. \end{aligned} \right\} (6.17)$$

¹⁾ См. сноску²⁾ на стр. 122.

²⁾ См. сноску²⁾ на стр. 120.

При этом градиент давления определится по окружной скорости вращения прослойки между пограничными слоями:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho r \beta^2. \quad (6.18)$$

Профили радиальных и окружных скоростей на диске при ламинарном режиме течения представляются в виде следующих полиномов:

$$\left. \begin{aligned} v_r &= v_0 \left[1 - \left(2 \frac{z}{\delta} - 1 \right)^2 \right], \\ v_\varphi &= \beta r \left\{ \xi - (\xi - 1) \left[1 - \left(1 - \frac{z}{\delta} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \right\} (6.19)$$

так что выполняются граничные условия

$$\left. \begin{aligned} v_r &= 0, \quad v_\varphi = r\omega \quad \text{при } z = 0, \\ v_r &= 0, \quad v_\varphi = r\beta \quad \text{при } z = \delta. \end{aligned} \right\} (6.20)$$

Переходя к подстановке (6.19) в (6.17), Окайа и Хасегава¹⁾ полагают, что, как и в случае свободного диска, толщина пограничного слоя δ не зависит от r , а также что максимум радиальной скорости v_0 линейно зависит от r .

Поэтому с учетом того, что

$$\tau_r = 4 \frac{v_0}{\delta} \mu, \quad \tau_\varphi = - \frac{2\beta r}{\delta} (\xi - 1) \mu,$$

получим из уравнений импульсов (6.17) следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} \beta^2 r^2 \left(\frac{7}{15} + \frac{1}{5} \xi \right) (\xi - 1) - \frac{8}{15} v_0^2 &= 4 \frac{r v_0}{\delta^2} \nu, \\ v_0 \beta r \left(\frac{7}{15} + \frac{1}{5} \xi \right) &= \frac{\beta^2 r^2}{\delta^2} (\xi - 1) \nu. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= \delta^{-2} r \nu \frac{\xi - 1}{\frac{7}{15} + \frac{1}{5} \xi}, \\ \delta &= \sqrt{\frac{\nu}{\beta} \left(\frac{20 + 20\xi}{7 + 3\xi} \right)^{\frac{1}{4}} : \sqrt{\frac{7}{15} + \frac{\xi}{5}}}, \end{aligned} \right\} (6.21)$$

¹⁾ Okaya T., Hasegawa M., On the friction to the disc rotating in a cylinder, Jap. Journal of Physics, т. 13, № 1, 1939.

а момент трения двух сторон диска

$$M_d = 4\pi \int_0^a \tau_\varphi r^2 dr = 2\pi\mu \frac{\beta}{\delta} (\xi - 1) a^4, \quad (6.22)$$

где a — радиус диска.

На неподвижной стенке кожуха профили скоростей имеют вид:

$$v_r = v'_0 \left[1 - \left(\frac{2z}{\delta'} - 1 \right)^2 \right], \quad v_\varphi = r\beta \left[1 - \left(1 - \frac{z}{\delta'} \right)^2 \right],$$

причем, как и выше,

$$\frac{\partial \delta'}{\partial r} = 0, \quad r \frac{\partial v'_0}{\partial r} = v'_0.$$

Так как на неподвижной стенке

$$\tau_r = 4 \frac{v'_0}{\delta'} \mu, \quad \tau_\varphi = \frac{2\beta r}{\delta'} \mu,$$

то, используя уравнения импульсов, получим:

$$v'_0 = \frac{r}{\delta'^2} \nu \frac{15}{7}, \quad \delta' = \sqrt{\frac{\nu}{\beta}} \sqrt{\frac{15}{7}} \left(\frac{20}{7} \right)^{\frac{1}{4}},$$

а момент трения неподвижных стенок радиуса b будет

$$M_{от} = 2\pi\mu\beta \frac{b^4}{\delta'}.$$

Из условия равенства моментов $M_d = M_{от}$ получаем уравнение для определения величины ξ :

$$\frac{(\xi - 1) \left(1 + \frac{3}{7} \xi \right)^{\frac{3}{4}}}{(1 + \xi)^{\frac{1}{4}}} = \left(\frac{b}{a} \right)^4. \quad (6.23)$$

Для коэффициента момента

$$c_M = \frac{M_d}{\frac{\rho}{2} a^5 \omega^2}$$

находим:

$$c_M = \frac{4\pi(\xi - 1)(3\xi + 7)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{15} 20^{\frac{1}{4}} \xi^{\frac{3}{8}} (\xi + 1)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\sqrt{R}}, \quad R = \frac{a^2 \omega}{\nu},$$

или

$$c_M = 6,60296 \left(\frac{b}{a} \right)^4 : \xi^{\frac{3}{2}} \sqrt{R}. \quad (6.24)$$

Заметим, что при вычислениях для разных значений b/a , близких к 1, удобно обозначить

$$n = 100 \left(\frac{b}{a} - 1 \right),$$

и тогда получится из (6.23)

$$\xi = \frac{\omega}{\beta} = 1,8394 (1 + 0,01694n + 0,0002146n^2 + \dots). \quad (6.25)$$

Некоторые результаты вычислений даны в таблице 11.

Таблица 11

Значения коэффициента момента для диска, вращающегося в кожухе при ламинарном режиме (по расчетам Окайа и Хасегава)

ξ	$\frac{b}{a}$	$\lg \left(\frac{c_M}{2} R^{\frac{1}{2}} \right)$	$\frac{c_M}{2} R^{\frac{1}{2}}$
1,8394	1,00000	0,12168	1,3234
1,84	1,00019	0,12180	1,3237
1,85	1,00338	0,12381	1,3299
1,86	1,00655	0,12552	1,3351
1,87	1,00970	0,12770	1,3418
1,88	1,01282	0,12959	1,3477
1,89	1,01591	0,13143	1,3534
1,90	1,01899	0,13324	1,3591
1,91	1,02204	0,13502	1,3646
1,92	1,02506	0,13676	1,3701
1,93	1,02807	0,13846	1,3755
1,94	1,03106	0,14013	1,3808
1,95	1,03403	0,14177	1,3860
1,96	1,03697	0,14338	1,3912
1,97	1,03989	0,14495	1,3962
1,98	1,04279	0,14650	1,4012
1,99	1,04568	0,14802	1,4061
2,00	1,04855	0,14951	1,4109
2,01	1,05140	0,15097	1,4157

Для местного коэффициента окружной составляющей силы трения при $b/a = 1$ получим:

$$\frac{\tau_{\varphi}}{\rho(r\omega)^2} = 0,4215R^{-0,5}. \quad (6.26)$$

Результат, полученный Окайа и Хасегава, являющийся уточнением расчета Шульц-Грунова, дает близкие к опытным значения величины c_M (см. рис. 36). Показанные на графике опытные значения получены Шульц-Груновым для диска диаметром 200 мм и кожуха диаметром 206 мм с зазором между диском и стенкой кожуха 3 мм.

Дальнейшим уточнением является учет трения обода диска и кожуха. Такая попытка имеется в работе Захарова¹⁾, который учитывает увеличение эффективной поверхности трения диска и кожуха за счет их ободов соответствующим условным увеличением радиусов a и b .

Заметим, что разобранную выше задачу о влиянии кожуха в случае, когда осевой зазор s велик по сравнению с толщиной пограничного слоя, можно решить также методом С. М. Тарга. Во втором приближении, при $a = b$, получается результат, достаточно близкий к формуле (6.24):

$$c_M = 2,52R^{-0,5}.$$

При малых относительных толщинах обода диска и кожуха в случае, когда числа R достаточно велики, так что образуются два пограничных слоя, момент трения практически не зависит от осевого зазора между диском и кожухом. Это наблюдали в своих опытах Шульц-Грунов и Цумбуш²⁾. Однако при дальнейшем увеличении осевого зазора момент трения начинает неуклонно расти за счет увеличения цилиндрической поверхности кожуха, приближаясь к моменту трения свободного диска.

Сопоставляя результат вычислений с опытными данными (см. рис. 36), замечаем, что полученный результат пригоден для значений $10^{4,5} < R \leq 10^5$. При больших значениях R течение на краях диска становится турбулентным, при меньших значениях R возникает взаимодействие слоев и исчезает вращающаяся как твердое тело прослойка между пограничными слоями.

¹⁾ Захаров А. Ф., Автореферат диссертации, Казань, 1954.

²⁾ См. сноску²⁾ на стр. 120.

§ 33. Турбулентный режим для диска, вращающегося в кожухе

В этом случае, обобщая решение Кармана (§ 16), профили скоростей вблизи вращающегося диска можно выбрать в виде

$$v_r = ar(\omega - \beta) \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \left(1 - \frac{z}{\delta}\right), \quad (6.27)$$

$$v_{\varphi} = r(\omega - \beta) \left[1 - \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right] + r\beta.$$

Тогда аналогично формулам (4.6') для составляющих напряжения трения получим:

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= 0,0225\rho \left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}} r^{\frac{3}{4}} (\omega - \beta)^{\frac{3}{4}} v_0 (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{8}}, \\ v_0 &= ar(\omega - \beta), \\ \tau_{\varphi} &= -0,0225\rho \left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}} r^{\frac{7}{4}} (\omega - \beta)^{\frac{7}{4}} (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{8}}. \end{aligned} \right\} (6.28)$$

Подстановка (6.27) в интегральные соотношения (6.17) дает

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{343}{3312} r \left[2v_0 \frac{dv_0}{dr} \delta + v_0^2 \frac{d\delta}{dr} \right] + \\ & + r^2 \delta \left[\frac{1}{36} \omega^2 + \frac{7}{36} \omega\beta - \frac{8}{36} \beta^2 \right] = \\ & = 0,0225 \left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}} r^{\frac{7}{4}} (\omega - \beta)^{\frac{7}{4}} (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{8}} v_0, \\ & \frac{7}{144} r^3 v_0 \frac{d\delta}{dr} (\omega - \beta) + r^2 v_0 \delta \left[\frac{49}{360} \omega + \frac{49}{72} \beta \right] = \\ & = 0,0225 \left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}} r^{\frac{15}{4}} (\omega - \beta)^{\frac{7}{4}} (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{8}}. \end{aligned} \right\} (6.29)$$

Далее, Окайа и Хасегава¹⁾ полагают, что, как и для случая свободного диска:

$$\delta = \varepsilon r^{\frac{3}{5}},$$

¹⁾ См. сноску на стр. 131.

где ε — постоянная. Тогда, введя обозначения

$$A = \frac{\beta}{720} [119\xi + 469], \quad B = \frac{\beta^2}{36} (\xi - 1)(\xi + 8),$$

$$C = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 13}{5 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 23},$$

$$X = 0,0225 \left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}} (\omega - \beta)^{\frac{3}{4}} (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{8}} r^{\frac{7}{4}},$$

получим из (6.29) два уравнения для определения δ и α :

$$r^2 \delta [B - C\alpha^2 (\omega - \beta)] = Xv_0,$$

$$r^2 v_0 \delta A = Xr^2 (\omega - \beta),$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{B}{A(\omega - \beta)} \sqrt{1 + \frac{C}{A}(\omega - \beta)} = \frac{115(\xi + 8)}{1799\xi + 1582}, \\ \delta &= \frac{0,0225^{\frac{4}{5}} \nu^{\frac{1}{5}} (\omega - \beta)^{\frac{3}{5}} (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{10}}}{\alpha^{\frac{4}{5}} A^{\frac{4}{5}}} r^{\frac{3}{5}}. \end{aligned} \right\} (6.30)$$

Для момента трения диска будем иметь:

$$M_d = \frac{20}{23} \pi \rho \alpha^{\frac{23}{5}} \cdot 0,0225^{\frac{4}{5}} \nu^{\frac{1}{5}} \beta^{\frac{9}{5}} (\xi - 1)^{\frac{8}{5}} \times \\ \times (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{10}} \alpha^{\frac{1}{5}} \left(\frac{119}{720} \xi + \frac{469}{720} \right)^{\frac{1}{5}}.$$

Аналогичный расчет производится для неподвижной стенки. Профили скоростей имеют вид:

$$v_r = v_0' \left(\frac{z}{\delta'}\right)^{\frac{1}{7}} \left(1 - \frac{z}{\delta'}\right), \quad v_\varphi = r\beta \left(\frac{z}{\delta'}\right)^{\frac{1}{7}}.$$

Напряжения трения равны

$$\tau_r = -0,0225\rho \left(\frac{\nu}{\delta'}\right)^{\frac{1}{4}} (r\beta)^{\frac{3}{4}} v_0' (1 + \alpha'^2)^{\frac{3}{8}},$$

$$\tau_\varphi = -0,0225\rho \left(\frac{\nu}{\delta'}\right)^{\frac{1}{4}} (r\beta)^{\frac{7}{4}} (1 + \alpha'^2)^{\frac{3}{8}},$$

$$\alpha' = \frac{v_0'}{\beta r}.$$

Подставив эти выражения в интегральные соотношения (6.17), получаем:

$$\frac{343}{3312} r \left[2v_0' \frac{dv_0'}{dr} \delta' + v_0'^2 \frac{d\delta'}{dr} \right] + \frac{2}{9} r^2 \beta^2 \delta' = \\ = 0,0225 r^{\frac{7}{4}} \left(\frac{\nu}{\delta'}\right)^{\frac{1}{4}} \beta^{\frac{3}{4}} v_0' (1 + \alpha'^2)^{\frac{3}{8}},$$

$$\frac{49}{72} r^2 v_0' \beta \delta' - \frac{7}{144} v_0' r^3 \beta \frac{d\delta'}{dr} = 0,0225 r^{\frac{15}{4}} \left(\frac{\nu}{\delta'}\right)^{\frac{1}{4}} \beta^{\frac{7}{4}} (1 + \alpha'^2)^{\frac{3}{8}}.$$

Полагая, далее,

$$\delta' = \varepsilon' r^{\frac{3}{5}},$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha'^2 &= \frac{460}{791} = 0,581542, \\ \varepsilon' &= \left[\frac{(1 + \alpha'^2)^{\frac{3}{8}}}{k\alpha'} \right]^{\frac{4}{5}} \left(\frac{\nu}{\beta}\right)^{\frac{1}{5}}, \quad k = \frac{469}{720}. \end{aligned} \right\} (6.31)$$

В результате для момента сил трения на стенке получается

$$M_{ст} = \frac{20}{23} \pi \rho \cdot 0,0225^{\frac{4}{5}} \nu^{\frac{1}{5}} \beta^{\frac{9}{5}} \delta^{\frac{23}{5}} (1 + \alpha'^2)^{\frac{3}{10}} k^{\frac{1}{5}} \alpha'^{\frac{1}{5}},$$

и из условия $M_d = M_{ст}$ получим уравнение

$$\alpha (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}} (\xi - 1)^8 \left(\frac{119}{720} \xi + \frac{469}{720} \right) = k\alpha' (1 + \alpha'^2)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{b}{a}\right)^{23}, (6.32)$$

которое совместно с (6.30) и (6.31) дает возможность определить ξ .

Коэффициент момента получается равным

$$c_M = 0,233448 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{23}{5}} : \xi^{\frac{9}{5}} R^{\frac{1}{5}}. (6.33)$$

При этом для малых значений $\frac{b}{a} - 1 = n : 100$ получено

$$\xi = \omega : \beta = 2,05908 (1 + 0,01482n + 0,0001413n^2 + \dots).$$

Соответствующие значения величин даны в таблице 12.

Таблица 12

Значения коэффициента момента для диска, вращающегося в кожухе, при турбулентном режиме (по расчетам Окайа и Хасегава)

ε	$\frac{b}{a}$	$\lg \left(\frac{c_M}{2} R^{0,2} \right)$	$\frac{c_M}{2} R^{0,2}$
2,0591	1,00000	$\bar{2},55255$	0,035691
2,06	1,00030	$\bar{2},55280$	0,035711
2,07	1,00357	$\bar{2},55552$	0,035933
2,08	1,00681	$\bar{2},55820$	0,036158
2,09	1,01004	$\bar{2},56084$	0,036378
2,10	1,01324	$\bar{2},56344$	0,036596
2,11	1,01643	$\bar{2},56599$	0,036814
2,12	1,01960	$\bar{2},56852$	0,037027
2,13	1,02275	$\bar{2},57101$	0,037240
2,14	1,02588	$\bar{2},57346$	0,037450
2,15	1,02900	$\bar{2},57587$	0,037659
2,16	1,03210	$\bar{2},57825$	0,037866
2,17	1,03518	$\bar{2},58059$	0,038071
2,18	1,03824	$\bar{2},58290$	0,038274
2,19	1,04129	$\bar{2},58518$	0,038475
2,20	1,04432	$\bar{2},58742$	0,038674
2,21	1,04733	$\bar{2},58964$	0,038872
2,22	1,05033	$\bar{2},59182$	0,039066

Для окружной составляющей местного трения при $\frac{b}{a} = 1$ будем иметь:

$$\frac{\tau_{\Phi}}{\rho(r\omega)^2} = 0,013065R^{-0,2}. \quad (6.34)$$

Сравнение с опытами Шультц-Грунова показывает (см. рис. 36), что учет разности между радиусами a и b приближает расчетные данные к опытным. Результаты расчетов Шультц-Грунова, представленные на рис. 36, не учитывают разности между радиусами a и b .

§ 34. Влияние шероховатости

Для получения формулы сопротивления шероховатого диска на режиме развитой шероховатости заметим, что опыты Пантелла¹⁾ показали, что относительное влияние осевого зазора s/R при наличии кожуха для шероховатого диска такое же, как и для гладкого диска; оно схематически изображено на рис. 45.

При этом, согласно многочисленным опытными данным, отношение минимального значения $(c_M)_{\text{мин}}$ к значению $(c_M)_{\text{св}}$ для «свободного» диска равно

$$\frac{(c_M)_{\text{мин}}}{(c_M)_{\text{св}}} \approx 0,474. \quad (6.35)$$

По теоретическим расчетам Кармана и Окайа—Хасегава получим несколько большее значение:

$$\frac{(c_M)_{\text{мин}}}{(c_M)_{\text{св}}} = \frac{0,0714}{0,146} = 0,489,$$

а с использованием формулы (4.35) несколько меньшее значение.

Применим соотношение (6.35) для шероховатого диска; тогда с помощью формулы (4.50) для свободного шероховатого диска получим для режима развитой шероховатости следующую формулу для коэффициента момента сопротивления шероховатого диска, вращающегося в кожухе:

$$(c_M)_{\text{мин}} \approx 0,051 \left(\frac{k}{R} \right)^{0,272}. \quad (6.36)$$

Сопоставим с этой формулой опытные данные, полученные замерами на гидротормозах дисковой конструкции.

1) См. сноску *) на стр. 120.

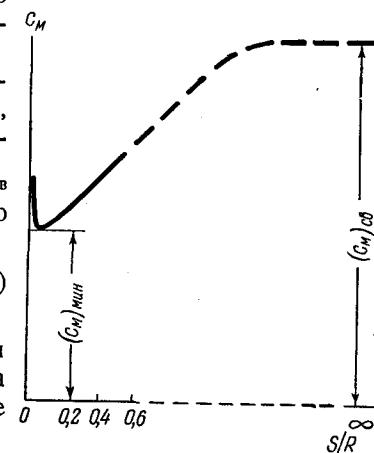


Рис. 45. Схема влияния относительного осевого зазора на момент сопротивления диска, вращающегося в кожухе.

проведенными в лаборатории турбомашин Невского машиностроительного завода¹⁾.

Мощность $N = M\omega$, снимаемая гидротормозом, определяется угловой скоростью ω и моментом Pl , который передается водой от вращающегося диска на корпус гидротормоза, лежащий в шарикоподшипниках. Здесь P — замеряемая сила, с которой действует на чашку весов рычаг гидротормоза длиной l .

Одновременно замерялась температура воды на входе и выходе из гидротормоза. Момент трения подшипников гидротормозов, который также передается на корпус, составляет пренебрежимо малую величину по сравнению с моментом трения диска о воду.

По замеренным величинам вычислялся коэффициент

$$c_M = \frac{N}{\frac{1}{2} \rho \omega^2 R^5},$$

а также величина $R = \frac{R^2 \omega}{v}$.

На рис. 46 представлены определенные таким образом значения c_M для различных гидротормозов. Кривая 1 относится к гидротормозу № 1 с диском $R = 0,25$ м, обработанным по $\nabla\nabla 4$, шириной обода $\frac{b}{R} = 0,04$, осевым зазором $\frac{s}{R} = 0,06$ и радиальным $\frac{a}{R} = 0,068$. Обработка $\nabla\nabla 4$ соответствует по ГОСТ 2789-51 средней высоте бугорка шероховатости $k \approx 0,03$ мм, т. е. $\frac{k}{R} \approx 0,12 \cdot 10^{-3}$. Исключив влияние обода по формуле²⁾

$$c_M = (c_M)_{b=0} \left(1 + 2,5 \frac{b}{R}\right),$$

получим, согласно кривой 1, что в этом случае $c_{M1} = 4,18 \cdot 10^{-3}$. Кривая 2 представляет собой значения c_M для гидротормоза № 2, имеющего те же конструктивные размеры, что и гидротормоз № 1, но диск в кольце от $R = 0,2$

¹⁾ Дорфман Л. А., Сопротивление шероховатого диска, вращающегося в кожухе, Журн. техн. физики, 1958, т. 28, № 1.

²⁾ См. сноску на стр. 86.

до $R = 0,25$ м покрыт путем накатки шероховатостью с высотой бугорка $k = 0,5$ мм, а в остальном обработан по $\nabla\nabla 4$.

На режиме развитой шероховатости коэффициент момента сопротивления кольца, ограниченного радиусами R_0 и R , равен, как нетрудно определить:

$$c_M = c_{M0} \left[1 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^{4,728}\right],$$

где c_{M0} — коэффициент, соответствующий трению диска радиуса R (т. е. при $R_0 = 0$).

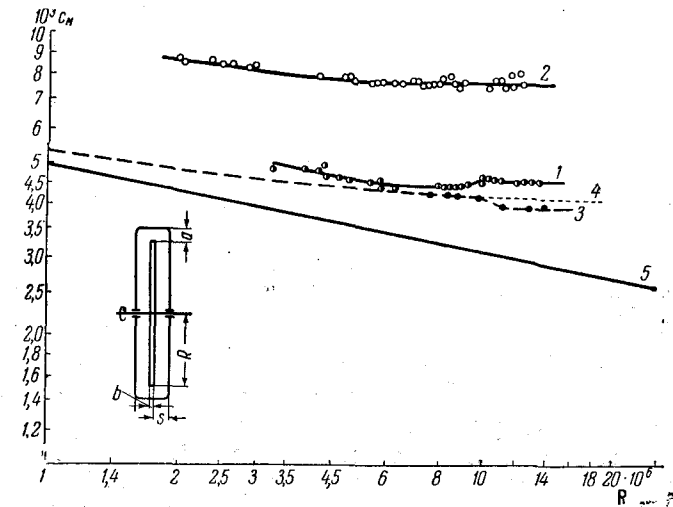


Рис. 46. Коэффициент момента сопротивления шероховатого диска, вращающегося в кожухе.

Поэтому для диска гидротормоза № 2

$$c_M = c_{M0} \left[1 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^{4,728}\right] + c_{M1} \left[\left(\frac{R_0}{R}\right)^{4,728} + 2,5 \frac{b}{R}\right].$$

Так как, согласно кривой 2, $c_M = 7,7 \cdot 10^{-3}$, то отсюда получим для $\frac{k}{R} = 2 \cdot 10^{-3}$ величину $c_{M0} = 8,9 \cdot 10^{-3}$.

Значения c_M для гидротормоза № 3 с диском $R = 0,175$ м, обработанным по $\nabla\nabla 6$, изображены на кривой 3. При этом

$\frac{b}{R} = 0,05$, $\frac{s}{R} = 0,1$, $\frac{a}{R} = 0,2$. Исключив трение обода, получим $c_M = 3,47 \cdot 10^{-3}$. Обработка $\nabla \nabla 6$ соответствует $k \approx 0,0082$ мм, т. е. $\frac{k}{R} = 0,047 \cdot 10^{-3}$.

Кривая 4 изображает результаты Пантелла для шероховатого (необработанного) диска. Заметим, что в области чисел R , где еще не наступил режим развитой шероховатости, все четыре кривые имеют такой же характер зависимости от R , который наблюдается для технически шероховатых труб.

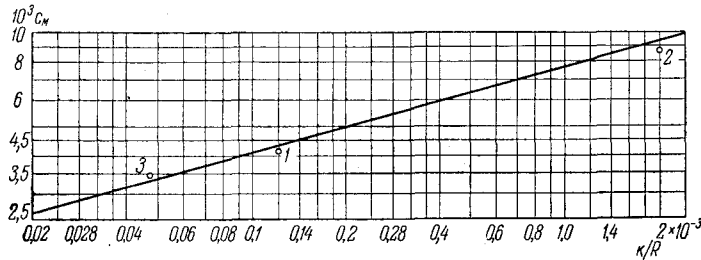


Рис. 47. Зависимость момента сопротивления шероховатого диска от относительной шероховатости: линия проведена по формуле (6.36), опытные точки — по данным рис. 46 (номера точек соответствуют номерам кривых рис. 46).

Для сопоставления на рис. 46 кривой 5 представлена опытная зависимость $(c_M)_{\text{мин}}$ от R для гладкого диска, полученная Шульц-Груновым, Цумбушем и др.

Полученные опытные значения (рис. 47) располагаются вблизи прямой, соответствующей формуле (6.36). Несколько меньшее по сравнению с расчетной кривой значение c_M для гидротормоза № 2 объясняется тем, что кожух имел шероховатость меньшую, чем диск, а это, как известно из опытов Пантелла, несколько должно уменьшить c_M . В то же время несколько завышенное значение c_M для гидротормоза № 3 вполне объяснимо увеличенным значением радиального зазора. Таким образом, имеющиеся опытные данные согласуются с формулой (6.36) и ее можно рекомендовать для расчета момента сопротивления шероховатости диска, вращающегося в кожухе, при $125 < \frac{R}{k} < 3000$, $0,02 \leq \frac{s}{R} < 0,1$ и $0,02 \leq \frac{a}{R} < 0,1$.

§ 35. Приближенный учет влияния расхода жидкости через зазор между вращающимся диском и кожухом

В зазоре между вращающимся диском турбомашин и цилиндрическим кожухом обычно имеется некоторый расход жидкости, связанный с протечками или с подачей воздуха на охлаждение диска. Приведем, следуя А. А. Ломакину¹⁾, приближенный расчет влияния расхода на кинематику потока в зазоре ширины s .

Аналогично тому как это делалось в § 15 (гл. IV), вычисление приращения момента количества движения относительно оси вращения в окружном направлении для кольцевого элемента жидкости между диском и кожухом дает уравнение, сходное с уравнением (4.2):

$$\frac{d}{dr} \left\{ r^2 \cdot 2\pi \int_0^s v_r v_\varphi dz \right\} = 2\pi \frac{r^2}{\rho} (\tau_\varphi|_s - \tau_\varphi|_0) \quad (6.37)$$

Здесь $\tau_\varphi|_0$ — напряжение трения на диске, а $\tau_\varphi|_s$ — напряжение трения на стенке кожуха.

При больших скоростях вращения в основной части зазора устанавливается постоянное для данного радиуса значение окружной скорости $v_\varphi = v_{\varphi 0}$, основное изменение окружной скорости происходит в тонких пограничных слоях на диске и стенке кожуха. Поэтому можно приближенно вынести из под знака интеграла значение $v_\varphi = v_{\varphi 0}$:

$$2\pi \int_0^s v_r v_\varphi dz \approx v_{\varphi 0} \cdot 2\pi \int_0^s v_r dz = \frac{v_{\varphi 0}}{r} \frac{G_s}{\gamma}, \quad (6.38)$$

где G_s — расход жидкости через зазор в кг/сек, а γ — ее удельный вес.

Величины напряжения трения выразим через квадраты относительной окружной скорости перемещения жидкости в зазоре с помощью коэффициента трения ξ :

$$\tau_\varphi|_0 = \xi \frac{\rho (r\omega - v_{\varphi 0})^2}{2}, \quad \tau_\varphi|_s = \xi \rho \frac{v_{\varphi 0}^2}{2}. \quad (6.39)$$

¹⁾ Ломакин А. А., Осевое давление в центробежных насосах с учетом величины зазора в уплотнительных кольцах, Советское котлотурбостроение № 12, 1940.

После подстановки выражений (6.38) и (6.39) в уравнение (6.37) получим:

$$G_s \frac{d}{dr} (rv_{\varphi 0}) = \pi \xi \gamma r^2 [(r\omega - v_{\varphi 0})^2 - v_{\varphi 0}^2] = \\ = \pi \xi \gamma r^2 \omega^2 \left[1 - 2 \frac{v_{\varphi 0}}{r\omega} \right]. \quad (6.40)$$

Если далее обозначить

$$z = \frac{v_{\varphi 0}}{r\omega}, \quad x = \frac{r}{r_0}, \quad (6.41)$$

где r_0 — радиус подвода жидкости в зазор, то получим:

$$x^2 dz + 2xz dx = \xi \frac{\pi \gamma \omega r_0^2}{G_s} x^4 (1 - 2z) dx$$

и окончательно

$$dz = \left[\beta x^2 - 2z \left(\beta x^2 + \frac{1}{x} \right) \right] dx, \quad (6.42)$$

где через β обозначена величина

$$\beta = \xi \frac{\pi \gamma \omega r_0^3}{G_s}. \quad (6.43)$$

В частных случаях:

1) когда отсутствует расход жидкости ($G_s = 0$), из уравнения (6.40) следует:

$$z = \frac{v_{\varphi 0}}{r\omega} = \frac{1}{2};$$

2) когда расход жидкости неограниченный ($G_s = \infty$), из (6.40) получаем:

$$rv_{\varphi 0} = \text{const.}$$

В общем случае для больших чисел Рейнольдса ξ слабо зависит от радиуса, поэтому можно считать величину β не зависящей от x . Интегрирование дифференциального уравнения (6.42) тогда дает

$$z = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{2}{3}\beta\omega^3} \left(C + \beta \int_1^x x^4 e^{\frac{2}{3}\beta\omega^3} dx \right). \quad (6.44)$$

Постоянная C зависит от граничного значения z при $x = 1$. Если, например, жидкость подается в зазор при $r = r_0$ и течет от центра, то до радиуса r_0 имеем случай течения без расхода,

поэтому при $r < r_0$ $z = \frac{1}{2}$, и граничное значение будет: при $x = 1$ $z = \frac{1}{2}$. Могут быть и другие случаи: если жидкость

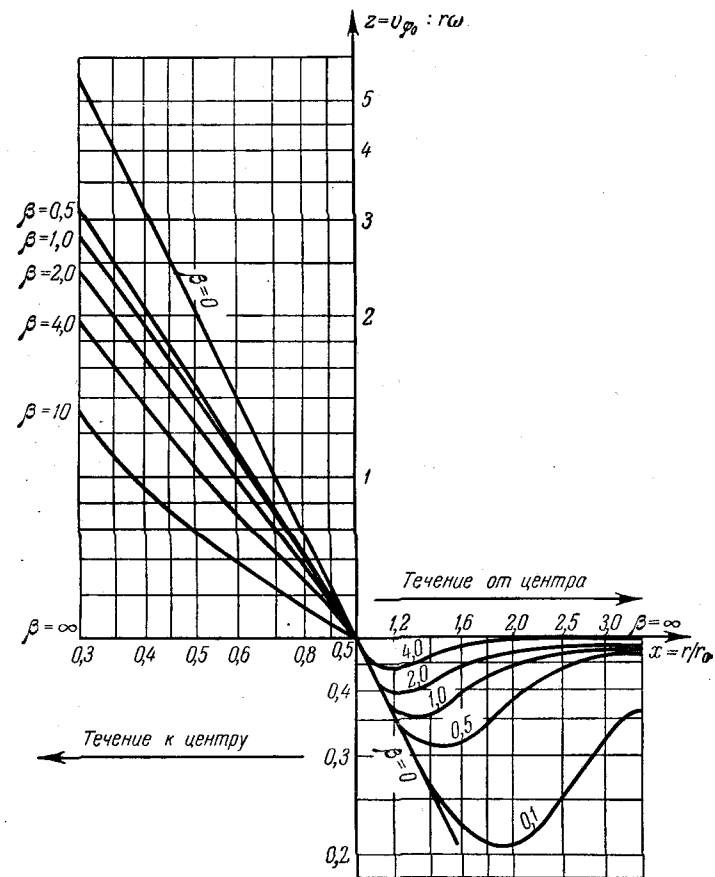


Рис. 48. Значения безразмерных окружных скоростей в ядре течения по радиусу диска, вращающегося в кожухе, при наличии расхода в осевом зазоре между диском и кожухом (по Ломакину).

подводится при $x = 1$ вдоль неподвижной цилиндрической ступки, то $z = 0$ при $x = 1$; если она подводится вблизи вращающейся ступицы, то $z = 1$ при $x = 1$.

При течении от центра постоянная β положительна, при течении к центру $\beta < 0$. Интеграл в формуле (6.44) приходится определять численным интегрированием. На рис. 48 представлены результаты вычислений.

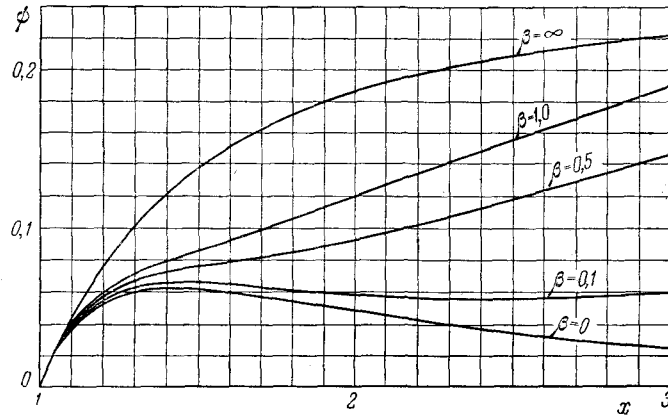


Рис. 49. Изменение давлений жидкости при вращении диска в кожухе и наличии расходного течения в осевом зазоре от центра диска.

При этом из граничного значения $z = \frac{1}{2}$ при $x = 1$ получаем

$$C = \frac{1}{2} e^{\frac{2}{3}\beta}.$$

Определим ту часть давлений в зазоре, которая обусловлена вращательным движением

$$\frac{1}{\rho} dp_\omega = \frac{v_{\varphi 0}^2}{r} dr. \tag{6.45}$$

После интегрирования получаем:

$$\frac{1}{\rho} (p_\omega - p_0) = \omega^2 \int_{r_0}^r z^2 r dr = \omega^2 r_0^2 \int_1^x z^2 x dx.$$

Безразмерный коэффициент напора будет поэтому выра-

жаться так:

$$\psi = \frac{p_\omega - p_0}{\frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2} = \frac{2}{x^2} \int_1^x z^2 x dx. \tag{6.46}$$

Результат вычислений при течении от центра представлен на рис. 49. К давлению p_ω необходимо еще добавить приращение давления за счет изменения радиальной скорости.

§ 36. Опытное изучение течения вокруг диска, вращающегося в кожухе

Замеры в потоке между вращающимся диском и неподвижным кожухом, проведенные В. С. Седач¹⁾, качественно подтвердили результаты, приведенные в предыдущем пара-

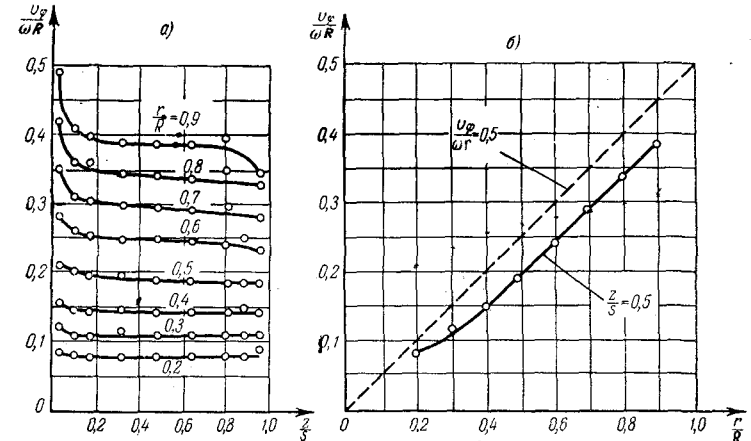


Рис. 50. Профили окружных скоростей на различных радиусах в зазоре между вращающимся диском и стенкой кожуха без расхода жидкости; $R = 8 \cdot 10^3$, $s/R = 0,155$ (по опытным данным Седача).

графе. При отсутствии расхода через зазор окружная скорость среды в середине зазора близка к 0,4 от скорости диска (рис. 50). С появлением протечек через зазор в направлении от центра к периферии окружные скорости в зазоре

¹⁾ Седач В. С., Кинематика потока воздуха, охлаждающего газотурбинный диск, Труды ХПИ, т. XXIV, вып. 6, 1957.

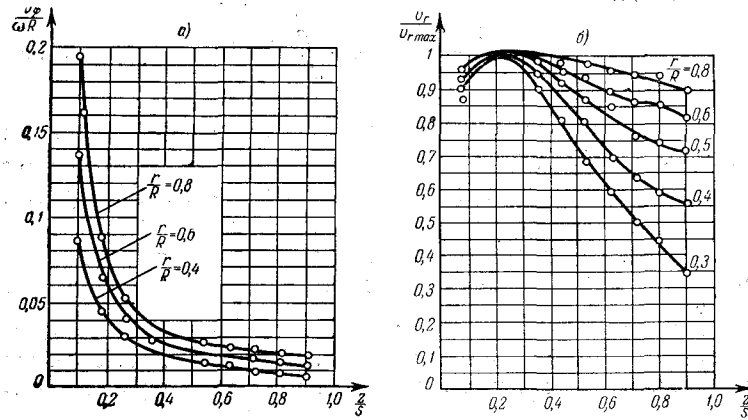


Рис. 51. Профили окружных (а) и радиальных (б) скоростей в зазоре между вращающимся диском и стенкой кожуха при наличии расходного течения от центра к периферии; $R=10^*$, $s/R=0,055$, $K=\frac{\omega R}{V R}=9$ (по Седачу).

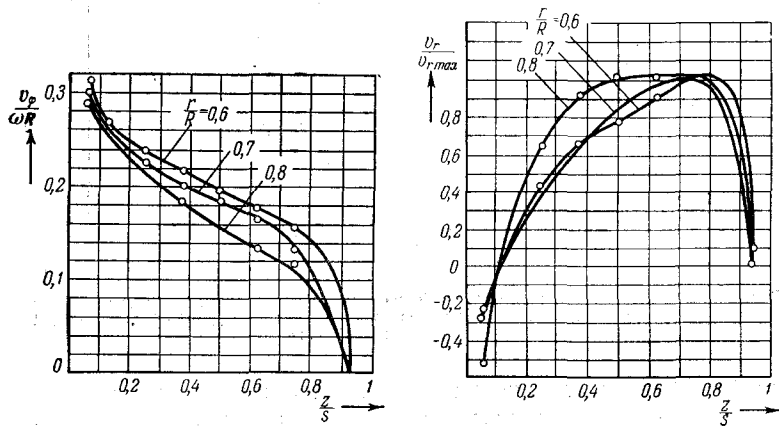


Рис. 52. Профили окружных и радиальных скоростей в зазоре между вращающимся диском и стенкой кожуха при наличии расходного течения от периферии к центру; $R=9,4 \cdot 10^*$, $s/R=0,08$, $K=\frac{\omega R}{V R}=14,4$ (по Седачу).

уменьшаются (рис. 51). Если же подавать воздух с периферии к центру, то закрутка потока в зазоре увеличивается (рис. 52).

Заметим, что отличие $\frac{v_{\phi 0}}{r\omega}$ от 0,5, которое наблюдалось при отсутствии расхода, объясняется не только приближен-

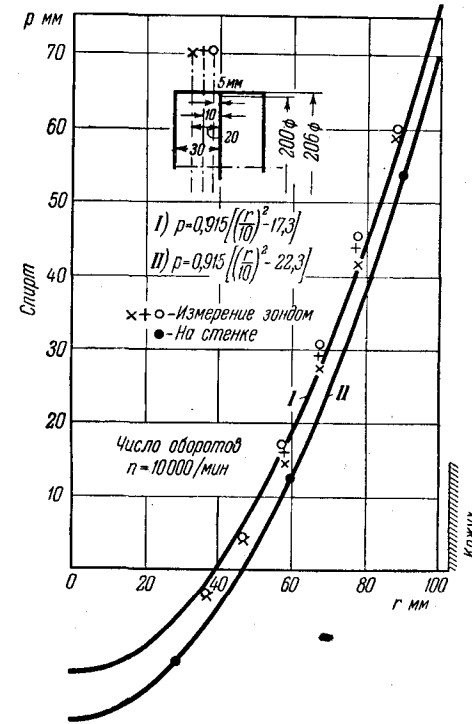


Рис. 53. Распределение давлений по радиусу между вращающимся диском и кожухом (по опытам Шульц-Грунова в воздушной среде).

ностью расчета, который не учитывает градиента окружных скоростей в зазоре, но также влиянием обода кожуха, который подтормаживает поток в зазоре. С увеличением зазора s увеличивается поверхность обода кожуха и скорость в зазоре уменьшается.

Шульц-Грунов наблюдал при ширине зазора $s = 30$ мм для диска радиусом 100 мм и кожухе радиуса 101 мм, что ядро потока вращается с угловой скоростью в 2,8 раза меньшей, чем угловая скорость диска. В соответствии с этим уменьшилось и давление в зазоре (рис. 53). Такой же эффект дает увеличение радиального зазора между диском и ободом

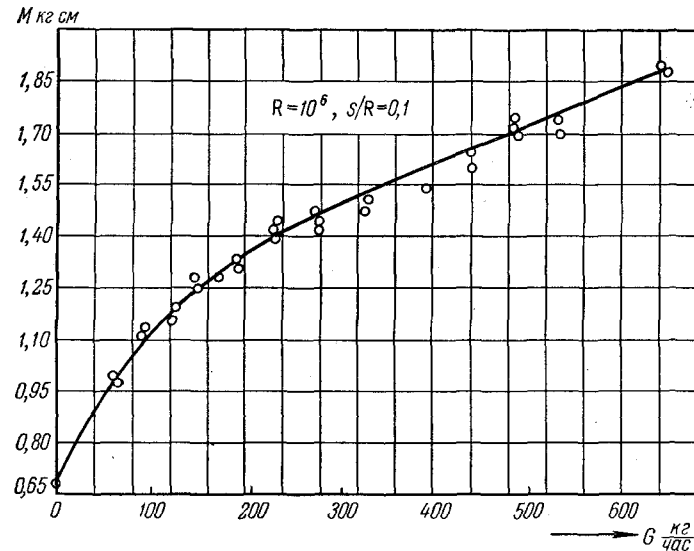


Рис. 54. Увеличение момента M сопротивления диска, вращающегося в кожухе, при увеличении расхода воды через зазор между диском и кожухом, подаваемой в направлении от центра к периферии (по Седачу).

кожуха, так как и в этом случае увеличивается подтормаживающее действие кожуха.

В связи с уменьшением окружной скорости в зазоре при наличии расхода в направлении от центра к периферии увеличивается относительная скорость частиц жидкости на внешней границе пограничного слоя по отношению к окружной скорости диска. Поэтому должны возрасти напряжение трения диска и момент сопротивления. Это подтверждено опытами В. С. Седач (рис. 54). Для приращения момента сопротивления одной стороны диска радиуса R им получена эмпи-

рическая формула

$$\Delta M = \frac{0,325}{K^{0,8}} \left(\frac{s}{R} \right)^{0,75} \rho \omega^2 R^5, \quad (6.47)$$

где K есть отношение окружной скорости диска на ободу ωR к среднерасходной радиальной скорости на том же радиусе

$$v_R = \frac{G_s}{2\pi R s \gamma};$$

$$K = \frac{\omega R}{v_R}. \quad (6.48)$$

Подтормаживающее действие цилиндрической части кожуха также приводит к увеличению градиента окружных скоростей поперек пограничного слоя на диске и соответственному увеличению момента сопротивления диска. Пантелл¹⁾ предложил следующую эмпирическую интерполяционную формулу для учета влияния ширины зазора s на момент сопротивления одной стороны диска радиуса R при отсутствии расхода (до $\frac{s}{R} = 0,44$):

$$M = \left[\frac{0,151}{\left(\frac{s}{R} \right)^2 R^{1,2}} + \frac{1,02 + \frac{s}{R}}{12 \left(6 + \frac{s}{R} \right) R^{0,182}} \right] \rho \omega^2 R^5. \quad (6.49)$$

Характер изменения M с изменением зазора представлен на рис. 45. При этом минимальное значение M достигается при

$$\left(\frac{s}{R} \right)_{\text{опт}} = \frac{2,97}{R^{0,34}}. \quad R = \frac{R^2 \omega}{v}. \quad (6.50)$$

Влияние радиального зазора, т. е. увеличения радиуса кожуха R_k относительно радиуса диска R_d , на момент трения шероховатого диска представлено по данным Пантелла на рис. 55. По оси абсцисс отложены значения R_k/R_d , по оси ординат отложены значения c_k приращения коэффициента момента трения. Таким образом, суммарный коэффициент момента трения равен

$$c_M = c_{M0} + c_k,$$

1) См. сноску 4) на стр. 120.

где c_{M0} — коэффициент момента трения при нулевом радиальном зазоре ($R_{\kappa} = R_d$).

С увеличением ширины b обода диска радиуса R увеличивается поверхность трения и соответственно момент сопро-

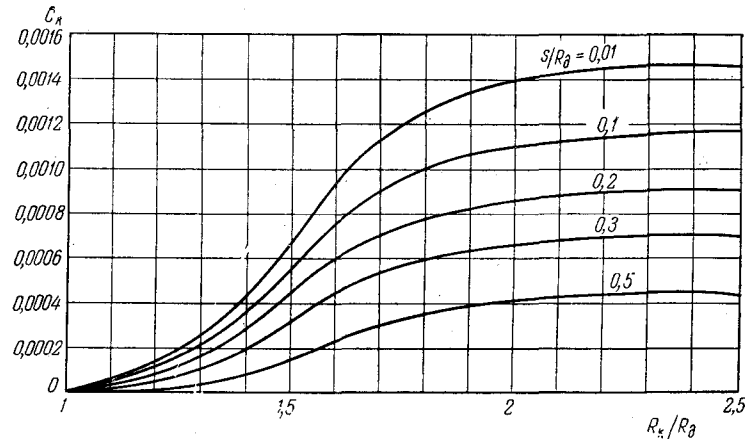


Рис. 55. Приращение коэффициента момента сопротивления диска при увеличении радиуса кожуха (по данным Пантелла).

тивления диска. Если представить напряжение трения обода в виде

$$\tau_{об} = \xi \rho \frac{(R\omega)^2}{2}, \quad (6.51)$$

то общий момент трения цилиндрического обода диска представится в виде

$$M_{об} = 2\pi R^2 b \xi \rho \frac{(R\omega)^2}{2}. \quad (6.52)$$

Положим в первом приближении, что при турбулентном режиме коэффициент трения ξ одинаков на всей поверхности диска (и обода); тогда для боковых стенок диска суммарный момент трения будет равен

$$M_d = \xi \cdot 4\pi \int_0^R \frac{(r\omega)^2}{2} r^2 dr = \frac{2}{5} \pi \xi \rho \omega^2 R^5. \quad (6.53)$$

Общий момент трения поэтому будет равен

$$M = M_d + M_{об} = M_d \left(1 + \frac{5}{2} \frac{b}{R}\right). \quad (6.54)$$

В первом приближении можно учитывать влияние обода по этой формуле.

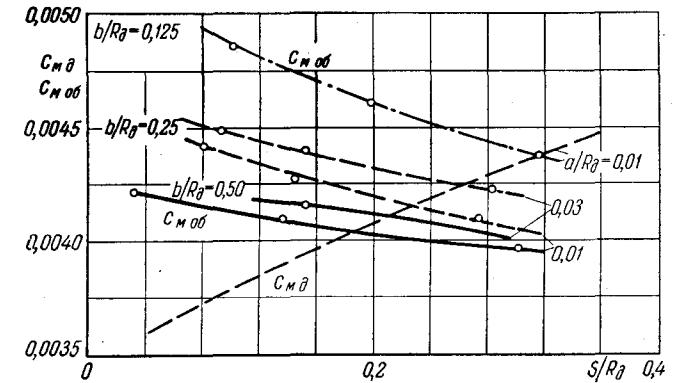


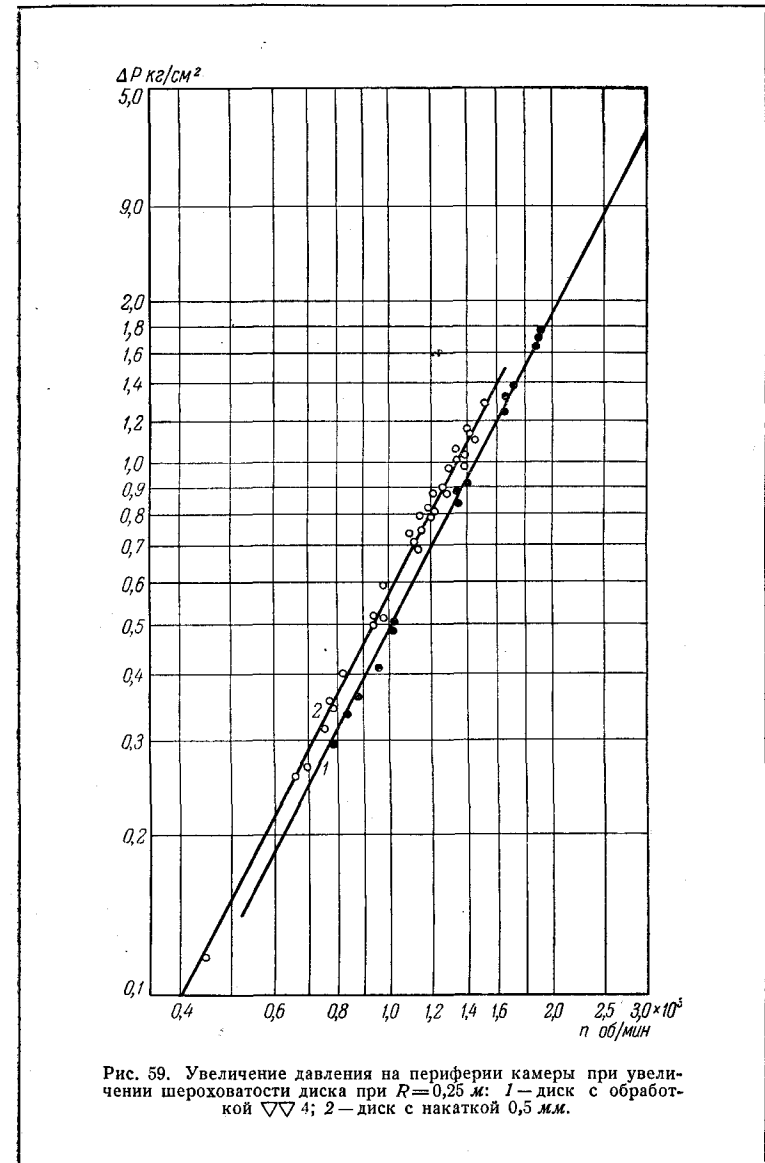
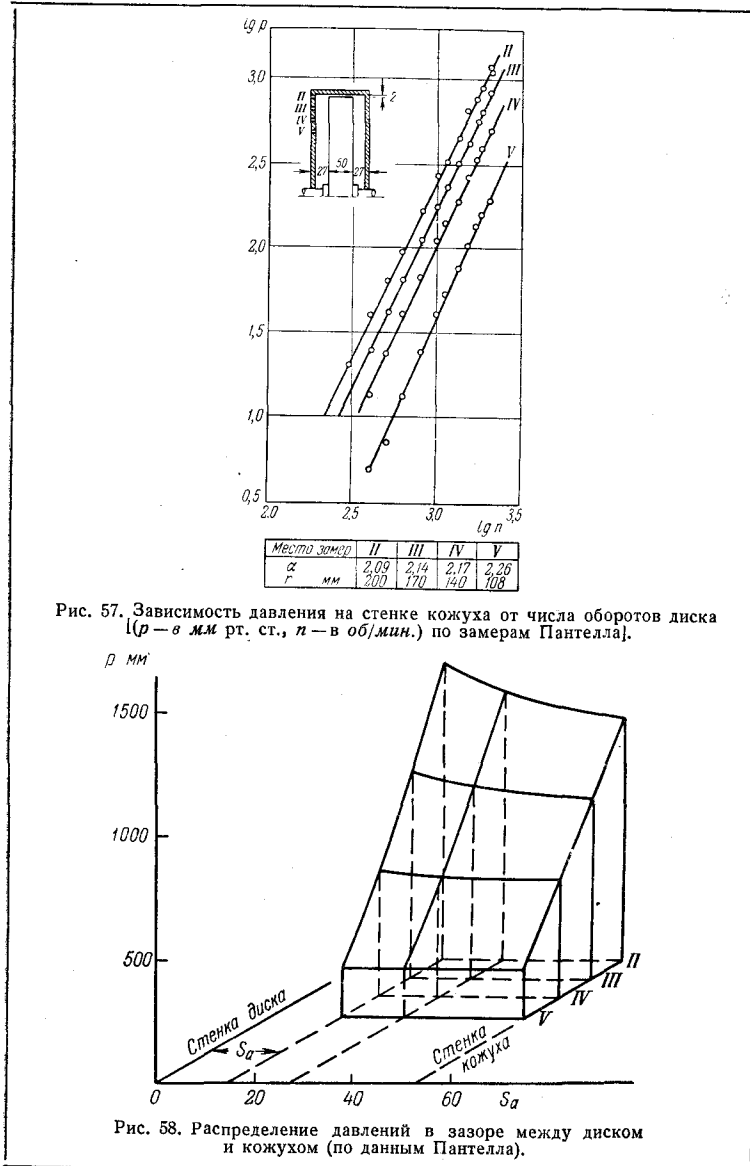
Рис. 56. Значения коэффициентов момента сопротивления диска и его обода при $R = 4,2 \cdot 10^6$ (по опытным данным Пантелла).

В общем случае можно представить суммарный коэффициент момента сопротивления в виде

$$c_M = c_{M_d} + \frac{5}{2} \frac{b}{R_d} c_{M_{об}}. \quad (6.55)$$

Значения c_{M_d} и $c_{M_{об}}$ для $R = \frac{R^2 \omega}{\nu} = 4,2 \cdot 10^6$ по опытным данным представлены на рис. 56. Из этих данных видно, что при широком обода для осевого зазора $\frac{s}{R_d} = 0,2$ величины c_{M_d} и $c_{M_{об}}$ близки между собой. При уменьшении ширины обода возрастает относительное влияние явлений, происходящих на стыке диска и его обода, приводящих к увеличению $c_{M_{об}}$. С уменьшением осевого зазора эти кромочные явления усиливаются.

Замеры давлений в зазоре между диском и кожухом (рис. 57) показывают, что давления в зависимости от оборотов изменяются примерно по квадратной параболе, т. е. p



пропорционально n^α , где $\alpha = 2$. С уменьшением радиуса показатель степени несколько увеличивается. Из рис. 58 следует, что вблизи диска давление несколько выше, чем вблизи кожуха, особенно на больших радиусах. Это связано с большей окружной скоростью среды вблизи диска. По этой же причине увеличение шероховатости диска приводит к увеличению давления в камере гидротормоза (рис. 59)¹⁾. Если увеличивать шероховатость стенок кожуха, то произойдет обратное явление.

§ 37. Приближенный расчет потока между двумя вращающимися дисками

Пусть два диска, расположенных на расстоянии s друг от друга, вращаются с одинаковой угловой скоростью (рис. 60). Тогда через отверстие радиуса r_0 вокруг центра диска воздух будет засасываться из окружающей среды и выбрасываться из кольцевой щели на внешней кромке дисков радиуса r_1 .

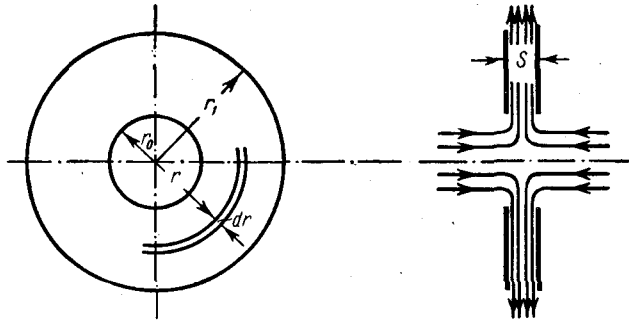


Рис. 60. Схема течения между двумя вращающимися дисками.

Повторим рассуждения § 15 при вычислении приращения момента количества движения относительно оси вращения для кольцевого элемента жидкости между обоими дисками; тогда получим:

$$\frac{d}{dr} \left\{ r^2 \cdot 2\pi \int_0^s v_r v_\varphi dz \right\} = 2\pi \frac{r^2}{\rho} \cdot 2\tau_\varphi,$$

где τ_φ — напряжение трения на дисках.

¹⁾ По замерам автора.

Произведя упрощения аналогично формулам (6.38) и (6.39), получим дифференциальное уравнение относительно средней окружной скорости среды в зазоре между дисками $v_{\varphi 0}$ в виде

$$G_s \frac{d}{dr} (r v_{\varphi 0}) = 2\pi \xi \gamma r^2 (r\omega - v_{\varphi 0})^2 \quad (6.56)$$

или, если для упрощения обозначить

$$\frac{2\pi \xi \gamma}{G_s} = \alpha,$$

в виде

$$r v_{\varphi 0}' = \alpha r^2 (r\omega - v_{\varphi 0})^2 - v_{\varphi 0}. \quad (6.57)$$

Решение этого дифференциального уравнения проведем по Ваннерусу¹⁾.

Введем замену переменных

$$y = \exp \left(\alpha \int (r\omega - v_{\varphi 0}) r dr \right). \quad (6.58)$$

Тогда первая производная даст

$$y' = y \alpha (r\omega - v_{\varphi 0}) r. \quad (6.59)$$

Вторая производная будет равна

$$y'' = \alpha y [2r\omega - v_{\varphi 0} - r v_{\varphi 0}' + (r\omega - v_{\varphi 0})^2 r^2 \alpha].$$

Используя (6.57), получим отсюда дифференциальное уравнение

$$y'' = 2\alpha y r \omega, \quad (6.60)$$

решение которого имеет вид:

$$y = C_1 \sqrt{r} I_{1/2} \left(\frac{2}{3} \alpha \sqrt{2\alpha \omega r^3} \right) + C_2 \sqrt{r} I_{-1/2} \left(\frac{2}{3} \alpha \sqrt{2\alpha \omega r^3} \right),$$

где $I_{1/2}$, $I_{-1/2}$ — бesselовы функции первого порядка мнимого аргумента.

Для величины $v_{\varphi 0}$, согласно (6.59), будем иметь:

$$v_{\varphi 0} = \left(1 - \frac{1}{\alpha \omega r^2} \frac{y'}{y} \right) \omega r.$$

¹⁾ Vannerus T., Rotierende Scheiben für Luftvorwärmer mit Gebläsewirkung, Allg. Wärmetechnik, № 12, 1955.

Если ввести функции

$$\varphi_n(x) = I^{-\frac{n}{3}} I_{n/3}(ix), \quad x = \frac{2}{3} \sqrt{2\alpha \omega r^3} \quad (n = 1, -1, 2, -2)$$

и обозначить $C = -C_2/C_1$, то

$$v_{\varphi_0} = [1 - f(x, C)] \omega r, \quad (6.61)$$

где

$$f(x, C) = \frac{4 \varphi_{-2}(x) + C \varphi_2(x)}{3x \varphi_1(x) + C \varphi_{-1}(x)}. \quad (6.62)$$

Значения функции $f(x, C)$ представлены на рис. 61.

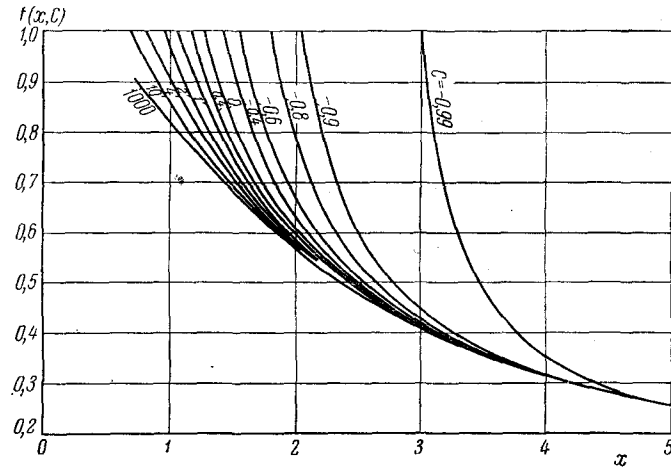


Рис. 61. Значения функции $f(x, C)$ (по Ваннерусу).

Постоянную интегрирования определяем по граничному условию на входе: при $r = r_0$. Если полагать, что $v_{\varphi_0}|_{r_0} = 0$, то

$$C = \frac{\varphi_{-2}(x_0) - \frac{3}{4} x_0 \varphi_1(x_0)}{\frac{3}{4} x_0 \varphi_{-1}(x_0) - \varphi_2(x_0)}.$$

Эти значения изображены на рис. 62. Полученная кривая имеет асимптотами прямые $x_0 = 0$ и $C = -1$. При $C = 0$ $x_0 = 1,28605$. Полученное решение дает возможность подсчитать значения v_{φ_0} для различных конструктивных размеров дисков и различного расхода. На рис. 63 изображены

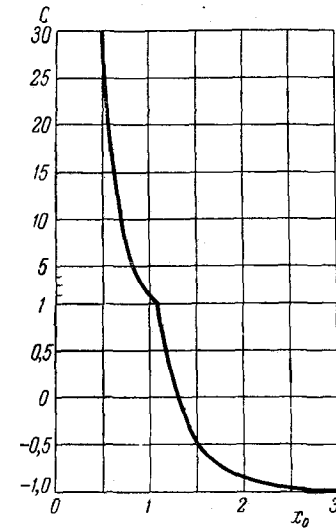


Рис. 62. Зависимость постоянной C от x_0 .

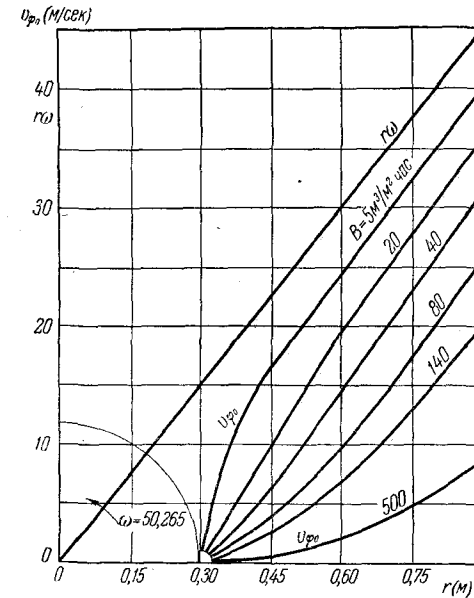


Рис. 63. Пример расчета окружных скоростей в ядре потока между двумя вращающимися дисками при $r_1 = 0,9$ м, $r_0 = 0,3$ м, $n = 480$ об/мин, $s = 0,015$ м. Значения коэффициентов трения взяты по аналогии с течением в трубе (по Ваннерусу).

результаты расчета для случая $r_1 = 0,9$ м, $r_0 = 0,3$ м при 480 оборотах в минуту и ширине зазора $s = 0,015$ м. В качестве параметра расхода B взято отношение объемного расхода воздуха ($м^3/час$) к площади рабочей поверхности дисков ($м^2$).

Заметим, что из основного уравнения (6.56) непосредственно следуют решения для предельных случаев. При отсутствии расхода между дисками $G_s = 0$ будет $v_{\varphi 0} = \omega r$, т. е. жидкость в зазоре будет вращаться как твердое тело вместе с дисками. При бесконечно большом расходе $G_s = \infty$ получается решение $v_{\varphi 0} r = \text{const}$, что приводит при $v_{\varphi 0}|_{r=r_c} = 0$ к отсутствию вращения среды между дисками.

Давление среды между вращающимися дисками можно определить так же, как это сделано в § 35.

В цитированной выше статье¹⁾ показан пример технического применения рассмотренного явления для создания дымососа-подогревателя. Дымосос имеет ряд дисков, вращающихся на общем валу. Если в пространстве между какими-то двумя дисками засасывается горячий дым, то соседнее пространство служит для засасывания подогреваемого воздуха. Такие дымососы нашли применение в котельных установках.

§ 38. Теплоотдача диска, вращающегося в кожухе

Так как для вращающегося в кожухе диска остаются справедливыми уравнения для окружной составляющей скорости и температуры (5.32) и (5.33), то остаются в силе и выводы § 23 о подобии профиля температур профилю окружных скоростей при $P = 1$ и квадратичном распределении температурных напоров T_d по радиусу диска. При этом для соблюдения подобия граничных условий на неподвижной стенке кожуха необходимо, чтобы $T = 0$ на ней, где T обозначает разность между температурой в данной точке и температурой на неподвижной стенке.

В этом случае для теплового потока q будет иметь место уравнение (5.40):

$$q = c_p \tau_{\varphi} \frac{T_d}{r \omega}. \quad (6.63)$$

¹⁾ См. сноску на стр. 157.

§ 38] ТЕПЛОТДАЧА ДИСКА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В КОЖУХЕ 161

Одновременно из подобия профиля температур в зазоре между диском и кожухом профилю окружных скоростей следует, что и между тепловыми пограничными слоями на стенках диска и кожуха должен быть участок с постоянной температурой $T = T_m$, так что

$$\frac{T_d}{T_m} = \frac{\omega}{\beta} = \xi, \quad \frac{T_d - T_m}{T_d} = \frac{\xi - 1}{\xi}. \quad (6.64)$$

Из формул (6.63) и (6.64) следует, что местное число Нуссельта N_m , характеризующее теплоотдачу диска на радиусе r , в этом случае ($P = 1$, $T_d = c_0 r^2$) равно

$$N_m = \frac{qr}{T_d - T_m} = R \frac{\tau_{\varphi}}{\rho (r\omega)^2} \frac{\xi}{\xi - 1}. \quad (6.65)$$

Следовательно, пользуясь формулами (6.26) и (6.34) и соответствующими значениями ξ при $a = b$ для ламинарного и турбулентного режимов, получим в этом случае соответственно следующие формулы:

$$N_m = 0,922 R^{0,5}, \quad (6.66)$$

$$N_m = 0,0251 R^{0,8}. \quad (6.67)$$

Сопоставляя их с формулами (5.43) и (5.44) для теплоотдачи диска в неограниченном пространстве, замечаем, что при наличии кожуха теплоотдача при ламинарном режиме увеличивается в полтора раза, в то время как для турбулентного режима она почти не изменяется. Этот вывод в отношении турбулентного режима подтверждается опытами В. М. Капиноса¹⁾ по определению теплоотдачи диска, вращающегося в открытом пространстве и в кожухе (опыты серии А и Д_γ).

Для случая произвольного градиента температур приближенная теория, развитая в § 25, полностью остается в силе. Поэтому подобно формулам (5.78), (5.82) для степенных распределений температур $T_d = C_0 r^n$ при $P = 1$ будем иметь: при ламинарном режиме

$$\frac{N_m}{(N_m)_{n=2}} = \frac{1}{2} \sqrt{n+2}, \quad (6.68)$$

¹⁾ Капинос В. М., Теплопередача дисков газовых турбин с воздушным охлаждением, Труды ХПИ, т. XXIV, вып. 6, 1957.

при турбулентном режиме

$$\frac{N_M}{(N_M)_{n=2}} = \left[\left(\frac{n+2,6}{4,6} \right) \right]^{0,2}. \quad (6.69)$$

С учетом влияния числа P по формулам (5.50) и (5.60) получим для воздуха ($P=0,72$) при постоянстве температурного напора по радиусу диска ($T_x = \text{const}$) следующие формулы:

при ламинарном режиме

$$N_M = 0,56 R^{0,5}, \quad (6.70)$$

при турбулентном режиме

$$N_M = 0,0184 R^{0,8}. \quad (6.71)$$

Следует заметить, что, так же как на момент сопротивления, на теплоотдачу диска, вращающегося в кожухе, оказывают влияние ряд факторов, как-то: относительные осевой и радиальные зазоры, расход жидкости через осевой зазор, шероховатость и т. п. Влияние некоторых из них исследовано в цитированной выше работе В. М. Капиноса.

§ 39. Нестационарное течение с теплопередачей в вязкой несжимаемой жидкости между двумя вращающимися дисками при наличии вдува¹⁾

Рассмотрим задачу о нестационарном течении вязкой несжимаемой жидкости, возникшем из состояния покоя, между двумя бесконечными дисками, отстоящими друг от друга на расстоянии s , из которых один вращается с зависящей от времени угловой скоростью $\omega_0(t)$, другой — с угловой скоростью $\omega_1(t)$. Пусть с первого диска происходит равномерный вдув той же жидкости с переменной от времени скоростью $v_0(t)$ и со второго — со скоростью $v_1(t)$. Таким образом, следует решить систему (1.1) при граничных и начальных условиях, имеющих вид:

$$\left. \begin{aligned} v_r(r, 0, t) &= v_r(r, s, t) = 0, \\ v_\varphi(r, 0, t) &= r\omega_0(t), \quad v_\varphi(r, s, t) = r\omega_1(t), \\ v_z(r, 0, t) &= v_0(t), \quad v_z(r, s, t) = v_1(t), \\ v_r(r, z, 0) &= v_\varphi(r, z, 0) = v_z(r, z, 0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.72)$$

¹⁾ Тирский Г. А., ДАН СССР, т. 119, № 2, 1958.

Легко проверить, что уравнения (1.1) допускают следующее решение:

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \frac{r}{t_0} F(\zeta, \tau), \quad v_\varphi = \frac{r}{t_0} G(\zeta, \tau), \quad v_z = \sqrt{\frac{v}{t_0}} H(\zeta, \tau), \\ p \frac{t_0}{\rho v} &= \frac{1}{2} A(\tau) \frac{r^2}{v t_0} + B(\zeta, \tau), \quad \text{где } \zeta = \frac{z}{\sqrt{v t_0}}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.73)$$

При этом функции F , G и H должны удовлетворять системе нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 H}{\partial \zeta^4} &= H \frac{\partial^3 H}{\partial \zeta^3} + 4G \frac{\partial G}{\partial \zeta} + \frac{\partial^3 H}{\partial \zeta^2 \partial \tau}, \\ \frac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2} &= H \frac{\partial G}{\partial \zeta} - \frac{\partial H}{\partial \zeta} G + \frac{\partial G}{\partial \tau}, \\ 2F + \frac{\partial H}{\partial \zeta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.74)$$

со следующими граничными и начальными условиями:

$$\left. \begin{aligned} H(0, \tau) &= \sqrt{\frac{t_0}{v}} v_0(t) = V_0(\tau), \\ H(\zeta, \tau) &= \sqrt{\frac{t_0}{v}} v_1(t) = V_1(\tau), \\ \frac{\partial H(0, \tau)}{\partial \zeta} &= \frac{\partial H(\zeta_1, \tau)}{\partial \zeta} = 0, \\ G(0, \tau) &= \omega_0(t) t_0 = \Omega_0(\tau), \\ G(\zeta_1, \tau) &= \omega_1(t) t_0 = \Omega_1(\tau), \\ G(\zeta, 0) &= H(\zeta, 0) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.75)$$

где $\zeta_1 = \frac{s}{\sqrt{v t_0}}$.

Функции $A(\tau)$ и $B(\zeta, \tau)$ определяются после решения задачи (6.73) — (6.75) из уравнений

$$\begin{aligned} A(\tau) &= \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} + G^2 - F^2 - H \frac{\partial F}{\partial \zeta} - \frac{\partial F}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial B(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} &= \frac{\partial^2 H}{\partial \zeta^2} - H \frac{\partial H}{\partial \zeta} - \frac{\partial H}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

задачи, как нетрудно заметить, принимает вид:

$$\frac{\lambda}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\tau^2}{\mu} = 0. \quad (7.4)$$

При малых по сравнению с r_1 значениях $h = r_2 - r_1$ можно вместо уравнений (7.2), (7.4) применить приближенные уравнения, которые получаются из них пренебрежением членами $\frac{\tau}{r}$ и $\frac{\lambda}{r} \frac{dT}{dr}$, малыми ввиду малости относительной кривизны $\frac{h}{r}$:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \text{const} = \tau_0, \\ \lambda \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{\tau_0^2}{\mu} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

где $y = r - r_1$. При этом выражение (7.3) для напряжения трения примет вид:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}. \quad (7.5')$$

Граничные условия задачи имеют вид: для скоростей

$$\left. \begin{aligned} v &= \omega_1 r_1 \quad \text{при} \quad r = r_1, \\ v &= \omega_2 r_2 \quad \text{при} \quad r = r_2 \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

для безразмерной температуры $\vartheta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= 0 \quad \text{при} \quad r = r_1, \\ \vartheta &= 1 \quad \text{при} \quad r = r_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Рассмотрим простейшие случаи ¹⁾.

а) Теплообмен при $\mu = \text{const}$. В этом случае распределение скоростей не зависит от процесса теплообмена. Уравнение (7.2) принимает вид:

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0. \quad (7.8)$$

Решением его при граничных условиях (7.6) является

$$v = \frac{(\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2) r^2 + (\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r}. \quad (7.9)$$

¹⁾ Гарт С. М., Основные задачи теории ламинарных течений, Гостехиздат, 1951.

ГЛАВА VII

ВРАЩЕНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

§ 40. Неизотермическое течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами

Рассмотрим установившееся течение вязкой жидкости между двумя неограниченными в направлении оси Oz круговыми соосными цилиндрами под действием вращения этих цилиндров: внутреннего, радиуса r_1 , с угловой скоростью ω_1 , и внешнего, радиуса r_2 , с угловой скоростью ω_2 . Течения во всех плоскостях, перпендикулярных к Oz , будут тождественны, т. е. движение будет плоское. Кроме того, будем полагать, что жидкость движется по концентрическим окружностям с центрами на оси Oz . В силу симметрии характеристики движения не зависят от координаты φ .

Тогда

$$v_r = v_z = 0, \quad v_\varphi = v(r), \quad p = p(r). \quad (7.1)$$

Рассматривая моменты сил трения $\tau = \tau_{r\varphi}$, приложенных к внутренней и наружной поверхностям цилиндрического слоя радиуса r и толщины dr , и имея в виду, что моменты сил действия и противодействия равны, получим уравнение

$$\frac{d}{dr} (r^2 \tau) = 0. \quad (7.2)$$

При этом напряжение трения τ , согласно уравнениям (1.3), выражается в виде формулы

$$\tau = \mu \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) = \mu r \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right). \quad (7.3)$$

Уравнение баланса энергии при неизотермическом течении выражается уравнением (1.7), которое для рассматриваемой

Тогда напряжение трения, согласно (7.3), получится равным

$$\tau = \frac{2\mu(\omega_2 - \omega_1)r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)r^2}. \quad (7.10)$$

Подставляя полученное значение в уравнение (7.4), получим:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\vartheta}{dr} \right) + \frac{4mr_1^2}{r^3} = 0, \quad (7.11)$$

где m — безразмерный коэффициент, равный

$$m = \frac{\mu r_1^2 r_2^2 (\omega_1 - \omega_2)^2}{\lambda (T_2 - T_1) (r_2^2 - r_1^2)^2}. \quad (7.12)$$

Решением уравнения (7.11) при граничных условиях (7.7) будет

$$\vartheta = m \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) + \left[1 - m \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \right] \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (7.13)$$

Если пренебречь диссипацией энергии, т. е. положить $m = 0$, то распределение температур между цилиндрами будет определяться формулой

$$\vartheta = \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (7.14)$$

Заметим, что эта формула будет справедлива и для любого вида функции $\mu(T)$.

Теплоотдача от стенок цилиндров определится значениями производной от ϑ вблизи стенок:

$$\frac{d\vartheta}{dr} \Big|_{r=r_1}, \quad \frac{d\vartheta}{dr} \Big|_{r=r_2}.$$

б) Теплообмен в тонком слое при $\mu(\vartheta) \neq \text{const}$. При этом случае можно воспользоваться уравнениями (7.5). Переходя к безразмерной температуре ϑ и безразмерной координате $\eta = y/r$, получим из уравнений (7.5) дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\vartheta}{d\eta^2} + \frac{h^2\tau_0^2}{\lambda(T_2 - T_1)\mu} = 0, \quad (7.15)$$

в котором подставим заданную зависимость $\mu = \mu(\vartheta)$ в виде

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_0} F(\vartheta), \quad (7.16)$$

и затем интегрируем его для заданных граничных условий

$$\vartheta = 0 \text{ при } \eta = 0, \quad \vartheta = 1 \text{ при } \eta = 1. \quad (7.17)$$

Например, при зависимости

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_0} (1 + \alpha^2\vartheta), \quad (7.18)$$

которая приближенно справедлива для капельных жидкостей, уравнение (7.15) примет вид:

$$\frac{d^2\vartheta}{d\eta^2} + n^2\alpha^2\vartheta = -n^2, \quad (7.19)$$

где

$$n^2 = \frac{h^2\tau_0^2}{\lambda\mu_0(T_2 - T_1)}. \quad (7.20)$$

Решением этого уравнения, удовлетворяющим граничным условиям (7.17), является выражение

$$\vartheta = \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{1 + \alpha^2 - \cos(n\alpha)}{\sin(n\alpha)} \sin(n\alpha\eta) + \cos(n\alpha\eta) - 1 \right]. \quad (7.21)$$

Для определения скорости v обратимся к формуле (7.5'), принимающей вид:

$$\frac{dv}{d\eta} = \frac{h\tau_0}{\mu_0} (1 + \alpha^2\vartheta). \quad (7.22)$$

Считая внутренний цилиндр неподвижным, т. е.

$$\left. \begin{aligned} v &= 0 \text{ при } \eta = 0, \\ v &= U \text{ при } \eta = 1, \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

получим после интегрирования (7.22) с удовлетворением первому граничному условию (7.23):

$$v = \frac{h\tau_0}{n\mu_0} \left\{ \frac{1 + \alpha^2 - \cos(n\alpha)}{\sin(n\alpha)} [1 - \cos(n\alpha\eta)] + \sin(n\alpha\eta) \right\}.$$

Подставляя сюда значение τ_0 из (7.20), получим окончательно:

$$v = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\lambda(T_2 - T_1)}{\mu_0}} \left\{ \frac{1 + a^2 - \cos(na)}{\sin(na)} [1 - \cos(na\eta)] + \sin(na\eta) \right\}, \quad (7.24)$$

где n определяется согласно второму граничному условию (7.23) из соотношения

$$\operatorname{tg} \frac{an}{2} = \frac{a}{2 + a^2} \sqrt{\frac{\mu_0 U^2}{\lambda(T_2 - T_1)}}. \quad (7.25)$$

Напряжение трения τ_0 определится формулой (7.20).

В общем случае для произвольного вида функции $F(\vartheta)$ уравнение (7.15) перепишем в виде

$$\vartheta' \frac{d\vartheta'}{d\vartheta} + \frac{k^2}{2} F(\vartheta) = 0, \quad (7.26)$$

где

$$k^2 = \frac{2h^2\tau_0^2}{\lambda(T_2 - T_1)\mu_0}, \quad (7.27)$$

а штрихи обозначают производные по η .

Интегрируя уравнение (7.26) по переменной ϑ , находим:

$$\vartheta' = \pm k \sqrt{\psi_0 - \psi(\vartheta)}, \quad (7.28)$$

где

$$\psi(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} F(\vartheta) d\vartheta, \quad (7.29)$$

а ψ_0 — постоянная интегрирования, подлежащая определению. Знак перед радикалом определяется знаком производной. Интегрируя (7.28) по η и удовлетворяя условию $\vartheta = 0$ при $\eta = 0$, получим:

$$\eta = \frac{1}{k} \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\pm \sqrt{\psi_0 - \psi(\vartheta)}}, \quad (7.30)$$

Второе условие ($\vartheta = 1$ при $\eta = 1$) дает соотношение для определения постоянной ψ_0 :

$$\int_0^1 \frac{d\vartheta}{\pm \sqrt{\psi_0 - \psi(\vartheta)}} = k. \quad (7.31)$$

Для нахождения v заменим в (7.5') μ выражением (7.16) и перейдем к переменной ϑ ; получим:

$$\vartheta' \frac{dv}{d\vartheta} = \frac{h\tau_0}{\mu_0} F(\vartheta),$$

что с учетом (7.28) дает после интегрирования

$$v = U_1 + \frac{h\tau_0}{k\mu_0} \int_0^{\vartheta} \frac{F(\vartheta) d\vartheta}{\pm \sqrt{\psi_0 - \psi(\vartheta)}}. \quad (7.32)$$

Здесь удовлетворено граничное условие $v = U_1$ при $\vartheta = 0$. Другое условие, $v = U_2$ при $\vartheta = 1$, приводит к уравнению

$$U_2 - U_1 = \frac{h\tau_0}{k\mu_0} \int_0^1 \frac{F(\vartheta) d\vartheta}{\pm \sqrt{\psi_0 - \psi(\vartheta)}}, \quad (7.33)$$

которое служит для определения τ_0 .

§ 41. Неизотермическое течение сжимаемого вязкого газа вокруг вращающегося цилиндра

Л. Г. Степанянц¹⁾ решил задачу о ламинарном течении вокруг цилиндра с учетом сжимаемости и зависимости вязкости от температуры.

Уравнение баланса энергии, которое в общем случае сжимаемого нагреваемого газа имеет векторный вид²⁾:

$$\operatorname{div} \left[\rho \mathbf{V} \left(i + \frac{V^2}{2} \right) - \mu \operatorname{grad} \left(\frac{i}{\rho} + V^2 \right) - \mu \operatorname{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{V}) + \frac{2}{3} \mu \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{V} \right] = 0,$$

в рассматриваемом случае приводится к простому виду:

$$\frac{d}{dr} \left\{ r \mu \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{i}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) - \frac{v^2}{r} \right] \right\} = 0, \quad (7.34)$$

где i — теплосодержание газа:

$$i = c_p T.$$

¹⁾ Степанянц Л. Г., Некоторые случаи движения сжимаемого вязкого газа, Труды ЛПИ, Энергомашиностроение, № 5, 1953.

²⁾ Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, Физматгиз, 1959, стр. 700.

Уравнение равновесия частицы газа, на которую действует центробежная сила и градиент давления, имеет такой же вид, как и для несжимаемой жидкости:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho v^2}{r}. \quad (7.35)$$

Для несжимаемой жидкости это уравнение получается также из первого уравнения системы (1.1).

Сохраняется также уравнение (7.2) постоянства момента трения. Для полноты системы уравнений следует еще присоединить уравнение Клапейрона

$$\frac{p}{\rho} = RT = \frac{k-1}{k} i, \quad (7.36)$$

где k — показатель изэнтропы, и уравнение зависимости вязкости газа от температуры в форме

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^n = \left(\frac{i}{i_0}\right)^n. \quad (7.37)$$

Переходя далее к безразмерным величинам, взяв за масштабы рассматриваемых величин их значения на поверхности цилиндра, т. е. при $r=r_1$, и введя еще обозначение

$$\rho_1 \frac{v_1^2}{p_1} = kM_1^2,$$

получим следующую систему дифференциальных уравнений, при записи которой сохраним старые обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{kM_1^2} \frac{dp}{dr} &= \frac{\rho v^2}{r}, \\ \frac{d}{dr} \left[r^2 \mu \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \right] &= 0, \\ \frac{d}{dr} \left\{ r \mu \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{i}{P(k-1)M_1^2} + \frac{v^2}{2} \right) - \frac{v^2}{r} \right] \right\} &= 0, \\ \frac{p}{\rho} &= i, \quad \mu = i^n. \end{aligned} \right\} (7.38)$$

Будем решать эту систему при граничных условиях, относящихся к случаю вращения цилиндра в неограниченном про-

странстве с монотонным изменением теплосодержания в бесконечности:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } r=1 \quad v=p=i=1, \\ \text{при } r \rightarrow \infty \quad v \rightarrow 0, \quad \frac{di}{dr} \rightarrow o\left(\frac{1}{r^\alpha}\right), \quad \alpha > 1. \end{aligned} \right\} (7.39)$$

Введенное выше число M_1 представляет собой отношение окружной скорости поверхности цилиндра к скорости звука в идеальном газе, имеющем температуру поверхности цилиндра.

Второе, третье и пятое уравнения системы (7.38) можно выделить в самостоятельную систему относительно трех неизвестных v , i и μ . Интегрируя их по одному разу, получим:

$$\left. \begin{aligned} r^2 \mu \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) &= -a^2, \\ r \mu \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{i}{P(k-1)M_1^2} + \frac{v^2}{2} \right) - \frac{v^2}{r} \right] &= b, \\ \mu &= i^n. \end{aligned} \right\} (7.40)$$

Из граничного условия при $r \rightarrow \infty$ сразу получаем $b=0$.

Исключим из полученной системы дифференциальных уравнений величину μ и введем новую неизвестную функцию $z = 1/r^2$, приняв за новый аргумент величину $\omega = v/r$; тогда после простейших преобразований получим систему

$$\left. \begin{aligned} z \frac{di}{d\omega} + P(k-1)M_1^2 \omega &= 0, \\ i^n &= \frac{a^2}{2} \frac{dz}{d\omega} \end{aligned} \right\} (7.41)$$

с граничными условиями:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \omega=0 \quad z=0, \\ \text{при } \omega=1 \quad z=1, \quad i=1. \end{aligned} \right.$$

Исключением величины i получим из (7.41) уравнение

$$z \left(\frac{dz}{d\omega} \right)^{\frac{1}{n}-1} \frac{d^2 z}{d\omega^2} + \beta z \omega = 0, \quad (7.42)$$

где

$$\beta = nP(k-1)M_1^2 \left(\frac{1}{2} a^2 \right)^{-\frac{1}{n}},$$

с граничными условиями:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \omega = 0 \quad z = 0, \\ \text{при } \omega = 1 \quad z = 1. \end{array} \right\} \quad (7.43)$$

Величина β рассматривается при решении (7.42) как неопределенный параметр и определяется из второго уравнения (7.41) при условии:

$$\text{при } \omega = 1 \quad i = 1.$$

Нетрудно заметить, что для каждого заданного n параметр β будет функцией величины φ :

$$\varphi = P(k-1)M_1^2 = P\theta_1,$$

где θ — температурный критерий, определенный в § 21.

Для случая $n=0$, т. е. постоянного коэффициента вязкости $\mu=1$, легко сразу найти решение системы (7.38):

$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{1}{r}; \quad i = 1 + P(k-1)M_1^2(1-v^2); \\ p = i^{2P(k-1)}; \quad \rho = i^{2P(k-1)-1}; \quad \mu = 1. \end{array} \right\} \quad (7.44)$$

Рассмотрим решение задачи для случая $n=1$, соответствующего газам с не слишком высокими температурами, а также для случая $n=\frac{1}{2}$ — для газов с высокими температурами.

Вращение цилиндра в газе при $n=1$. В этом случае уравнение (7.42) примет вид:

$$z \frac{d^2 z}{d\omega^2} + \beta\omega = 0. \quad (7.45)$$

Для теплосодержания из второго уравнения (7.4) получим:

$$i = \frac{\varphi}{\beta} \frac{dz}{d\omega}.$$

Решение вблизи $z=0$, $\omega=0$ разыскивается в виде степен-

ного ряда

$$z = \sum_{s=1}^{\infty} C_s \omega^s, \quad (7.46)$$

сходящегося вместе с производной при $\frac{\beta\omega}{C_1^2} < 1$ ¹⁾.

Коэффициенты C_s определяются из рекуррентных соотношений:

$$\left. \begin{array}{l} C_2 = -\frac{\beta}{2C_1}, \\ C_s = -\frac{1}{s(s-1)C_1} \sum_{j=2}^{s-1} j(j-1)C_j C_{s+1-j}. \end{array} \right\} \quad (7.47)$$

Таким образом:

$$\left. \begin{array}{l} z = C_1 \omega \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta\omega}{C_1^2} \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{\beta\omega}{C_1^2} \right)^2 - \frac{1}{36} \left(\frac{\beta\omega}{C_1^2} \right)^3 - \dots \right], \\ i = \frac{C_1}{\beta} \varphi \left[1 - \frac{\beta\omega}{C_1^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\beta\omega}{C_1^2} \right)^2 - \frac{1}{9} \left(\frac{\beta\omega}{C_1^2} \right)^3 - \dots \right] \end{array} \right\} \quad (7.48)$$

причем C_1 и β должны быть найдены из условий

$$\text{при } \omega = 1, \quad z = 1 \text{ и } i = 1.$$

Заметим, что требование положительности теплосодержания $i > 0$ приводит к условию

$$\frac{\beta\omega}{C_1^2} < 0,76,$$

обеспечивающему сходимость полученных рядов во всей интересующей нас области изменения переменных.

Результаты вычислений — изменение скорости v и теплосодержания i вдоль радиуса — представлены на рис. 64 и 65.

¹⁾ Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ИЛ, 1951.

По найденным значениям v и i находим p и ρ из первого и четвертого уравнений системы (7.38), интегрирование которых при условии $p=1$ при $r=1$ дает для давления

$$p = \exp \left(k M_1^2 \int_1^r \frac{v^2}{r i} dr \right). \quad (7.49)$$

Плотность вычисляется затем из уравнения $\rho = \frac{p}{i}$.

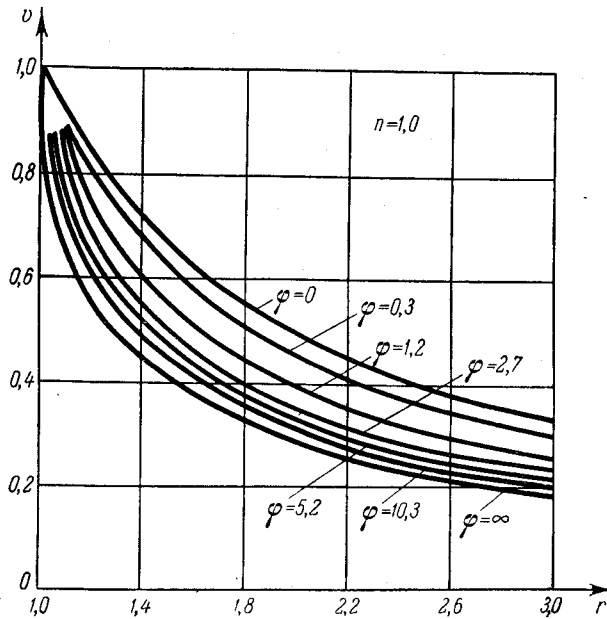


Рис. 64. Распределение скоростей вблизи вращающегося в газе цилиндра при $n=1$ (по Степанянцу).

На рис. 66 и 67 представлены графики распределений p и ρ по радиусу для воздуха ($k=1,4$, $P=0,75$). Для больших значений φ полученные значения величин p и ρ нельзя считать достоверными, так как при больших φ велики также температуры (теплосодержания) газа (см. рис. 65), и допущение $n=1$ теряет силу.

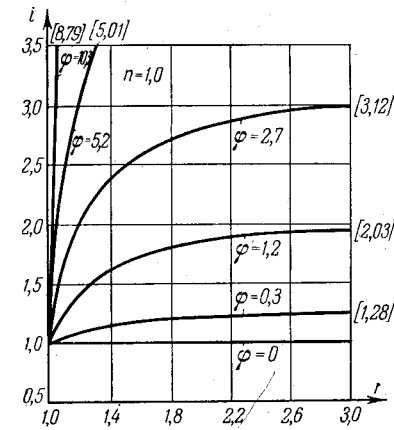


Рис. 65. Распределение теплосодержания вблизи вращающегося в газе цилиндра при $n=1$ (по Степанянцу). Цифры в квадратных скобках обозначают значения в бесконечности.

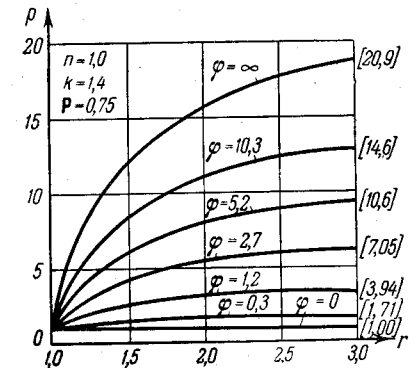


Рис. 66. Распределение давлений вблизи вращающегося в газе цилиндра при $n=1$ (по Степанянцу).

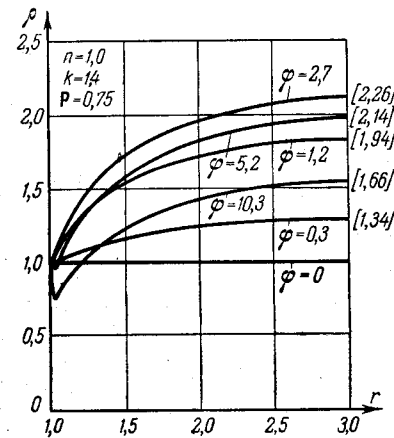


Рис. 67. Распределение плотности вблизи вращающегося в газе цилиндра при $n=1$ (по Степанянцу).

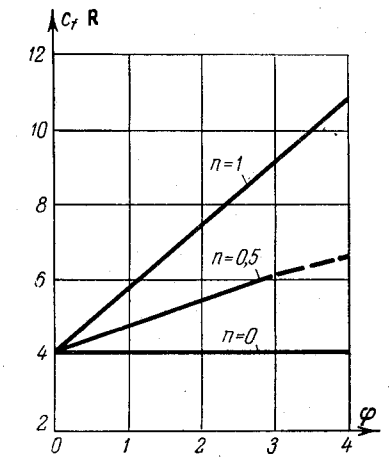


Рис. 68. Коэффициент сопротивления вращающегося в газе цилиндра (по Степанянцу).

Коэффициент трения поверхности цилиндра о газ $c_f = \frac{\tau_1}{\frac{1}{2} \rho_1 v_1^2}$ получается равным

$$c_f = \frac{1}{R_1} \frac{4\varphi}{\beta}, \quad R_1 = \frac{\rho_1 v_1 r_1}{\mu_1}. \quad (7.50)$$

График изменения $c_f R_1$ изображен на рис. 68. Для $n=0$, как и для несжимаемой жидкости, $c_f = 4/R_1$.

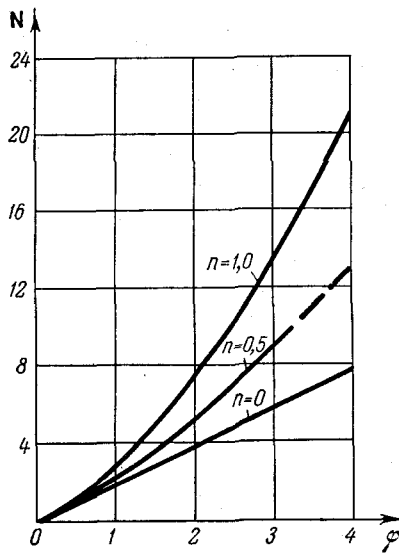


Рис. 69. Коэффициент теплоотдачи вращающегося в газе цилиндра (по Степанянку).

Теплоотдача цилиндра характеризуется величиной

$$N = \frac{q_1 r_1}{\lambda_1 T_1} = 2 \frac{\varphi^2}{\beta},$$

$$q_1 = \lambda_1 \frac{T_1}{r_1} \left(\frac{di}{dr} \right)_{r=1}; \quad (7.51)$$

значения которого изображены на рис. 69.

Для $n=0$

$$N = 2\varphi \quad (7.52)$$

Вращение цилиндра в газе с высокой температурой ($n=0,5$). В этом случае уравнение (7.42) примет вид:

$$z \frac{dz}{d\omega} \frac{d^2 z}{d\omega^2} + \beta \omega = 0, \quad (7.53)$$

где

$$\beta = \frac{2P(k-1)M_1^2}{a^4} = \frac{2\varphi}{a^4}. \quad (7.54)$$

Для определения теплосодержания i и вязкости μ получим соответственно уравнения:

$$i = \frac{\varphi}{2\beta} \left(\frac{dz}{d\omega} \right)^2, \quad (7.55)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\varphi}{2\beta}} \frac{dz}{d\omega}. \quad (7.56)$$

Для нахождения связи $\beta = \beta(\varphi)$ в настоящем случае удобно воспользоваться условием

$$\text{при } \omega = 1 \quad \mu = 1.$$

Как и выше, решение ищем в виде степенного ряда

$$z = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \omega^m. \quad (7.57)$$

Для определения C_2 получаем после подстановки ряда в (7.53) уравнение

$$2C_1^2 C_2 + \beta = 0,$$

а для вычисления последующих коэффициентов — рекуррентную формулу

$$2 \cdot 1 C_2 I_m + 3 \cdot 2 C_3 I_{m-1} + \dots + m(m-1) C_m I_2 = - (m+1) m C_{m+1} C_1^2,$$

где

$$I_s = \sum_{j=0}^{s-1} (j+1) C_{s-j} C_{s+j}.$$

В результате получаем:

$$z = C_1 \omega \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta \omega}{C_1^3} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\beta \omega}{C_1^3} \right)^2 - \frac{11}{48} \left(\frac{\beta \omega}{C_1^3} \right)^3 - \dots \right], \quad (7.58)$$

а для коэффициента вязкости, согласно (7.56), имеем:

$$\mu = C_1 \sqrt{\frac{\varphi}{2\beta}} \left[1 - \left(\frac{\beta \omega}{C_1^3} \right) - \frac{3}{4} \left(\frac{\beta \omega}{C_1^3} \right)^2 - \frac{11}{12} \left(\frac{\beta \omega}{C_1^3} \right)^3 - \dots \right]. \quad (7.59)$$

Л. Г. Степанянку удалось просто доказать сходимость ряда (7.58) при $\left| \frac{\beta \omega}{C_1^3} \right| < \frac{1}{3}$. По-видимому, имеет место сходимость вплоть до предельного значения $\frac{\beta \omega}{C_1^3} = 0,45$ (соответствующего $i=0$).

Для определения постоянных C_1 и β следует подчинить ряды (7.58) и (7.59) условиям:

$$\text{при } \omega = 1: \quad z = 1, \quad \mu = 1.$$

180 ВРАЩЕНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ [гл. VII]

Результаты вычислений величин v , i , p , ρ , μ , $c_p R_1$ и N представлены на графиках рис. 68—74. Нетрудно убедиться, что величины c_p и N определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} c_p R_1 &= 2 \sqrt{\frac{2\varphi}{\beta}}, \\ N &= 2\varphi \sqrt{\frac{2\varphi}{\beta}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.60)$$

Течение газа между двумя вращающимися цилиндрами. Л. Г. Степанянец рассмотрел также задачу о движении сжимаемого газа между двумя вращающимися соосными цилиндрами при условии, что внешний цилиндр является нетеплопроводным. В этом случае систему (7.38) следует решить при граничных условиях:

$$\begin{aligned} \text{при } r=1: \quad v &= 1, \quad i = 1, \\ p &= 1, \\ \text{при } r=r_2: \quad v &= \omega_2 r_2 = v_2, \\ \frac{di}{dr} &= 0. \end{aligned}$$

Как и ранее, выделяем систему из трех уравнений, которая

после введения переменной $\omega = v/r$ и одного интегрирования примет вид:

$$\left. \begin{aligned} r^3 \mu \frac{d\omega}{dr} &= -a, \\ r \mu \left[\frac{di}{dr} + P(k-1) M_1^2 r^2 \omega \frac{d\omega}{dr} \right] &= b, \\ \mu &= i^n. \end{aligned} \right\} \quad (7.61)$$

Постоянная b может быть выражена через постоянную a благодаря граничному условию $\frac{di}{dr} = 0$ при $r=r_2$. Как следует из (7.61),

$$b = -P(k-1) M_1^2 a \omega_2.$$

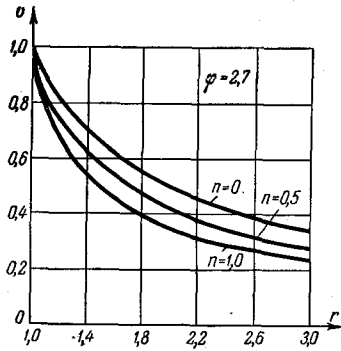


Рис. 70. Распределение скоростей вблизи вращающегося в газе цилиндра при $n=0,5$ (по Степанянцу).

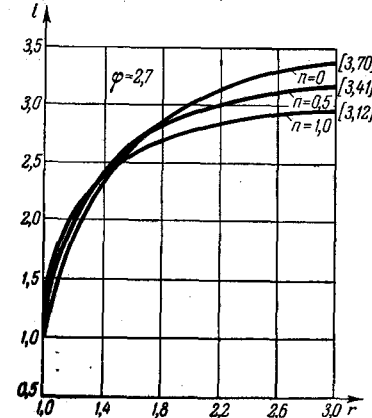


Рис. 71. Распределение теплосодержания вблизи вращающегося в газе цилиндра при $n=0,5$ (по Степанянцу).

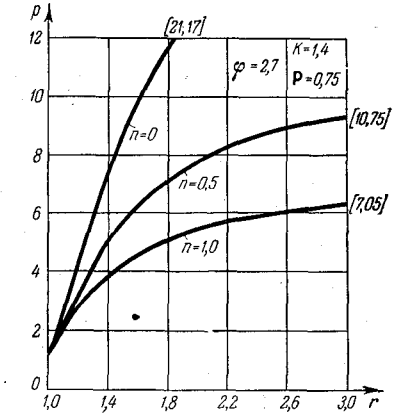


Рис. 72. Распределение давлений вблизи вращающегося в газе цилиндра при $n=0,5$ (по Степанянцу).

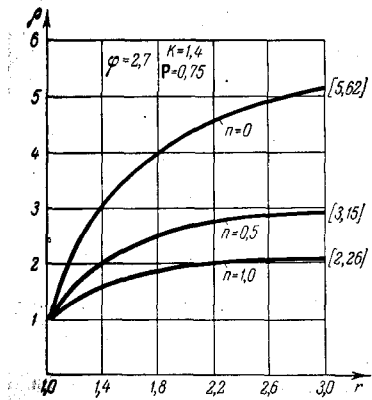


Рис. 73. Распределение плотностей вблизи вращающегося в газе цилиндра при $n=0,5$ (по Степанянцу).

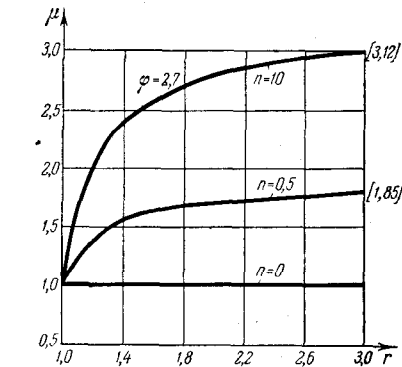


Рис. 74. Изменение вязкости вблизи вращающегося в газе цилиндра при $\varphi=2,7$ (по Степанянцу).

При решении системы (7.61) встречаются более существенные вычислительные трудности, чем в случае «свободного» цилиндра.

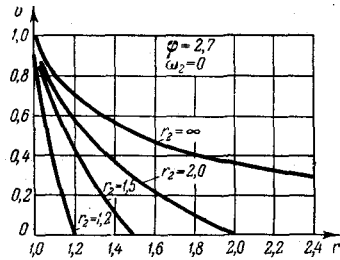


Рис. 75. Распределение скоростей между внутренним вращающимся и наружным неподвижным цилиндрами ($n=1$) (по Степанянцу).

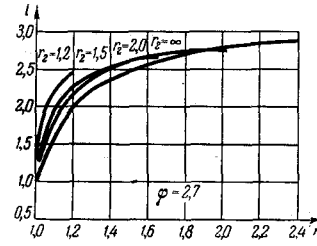


Рис. 76. Распределение теплотенности между внутренним вращающимся и наружным неподвижным цилиндрами при $n=1$ (по Степанянцу).

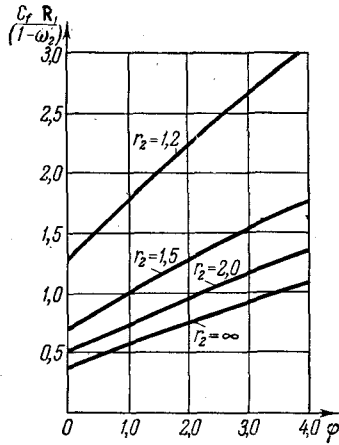


Рис. 77. Сопротивление цилиндра, вращающегося в газе, при наличии сосного наружного вращающегося цилиндра при $n=1$ (по Степанянцу).

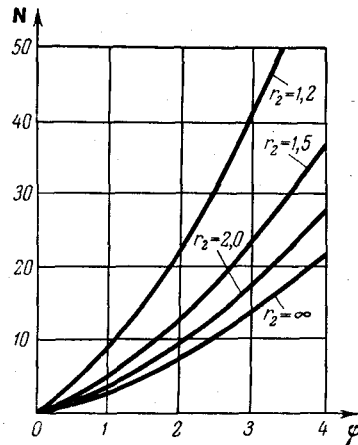


Рис. 78. Теплоотдача к цилиндру, вращающемуся внутри сосного вращающегося цилиндра ($n=1$) (по Степанянцу).

Окончательные результаты для $n=1$ изображены на рис. 75—78. При этом величина φ обозначает здесь:

$$\varphi = P(k-1)M_1^2(1-\omega_2)^2.$$

В заключение заметим, что приведенные выше решения выявили существенное влияние сжимаемости и величины тем-

пературного напора на сопротивление и теплоотдачу вращающегося цилиндра. Вместе с тем следует обратить внимание на то, что все изложенное относится к ламинарным течениям. С увеличением скорости вращения цилиндров теряется устойчивость ламинарных течений и они переходят в турбулентные течения, для которых приведенные решения уже не справедливы¹⁾.

§ 42. Об эффекте Ранка

Если тангенциально подавать в цилиндрическую трубку газ под давлением, то в трубке образуется вращающийся поток. Ранк заметил²⁾, что при этом наблюдается различие температуры торможения в приосевых и периферийных струйках, достигающее нескольких десятков градусов. На этом эффекте основано температурное разделение газов и паров.

Для объяснения эффекта Ранка рассмотрим, следуя Л. А. Вулису³⁾, распределение температуры торможения в стационарном одномерном круговом движении вязкого газа.

Воспользуемся уравнением (7.34) и будем для простоты считать физические константы μ , λ , c_p постоянными.

Тогда после интегрирования с учетом условий прилипания газа к твердой стенке и отсутствия теплоотвода на одной из границ приходим к выражению для температуры

$$T + P \frac{v^2}{2c_p} = P \int \frac{v^2}{c_p} \frac{dr}{r} + \text{const.} \quad (7.62)$$

При условии $\mu = \text{const}$ распределение скоростей определяется формулой (7.9):

$$v = Ar + Br^{-1}.$$

¹⁾ Дальнейшее развитие вопросов, рассмотренных в § 40 и 41, дано в работе Борисенко А. И. и Мышкис А. Д., Температурные и скоростные поля при ламинарном движении жидкости между вращающимися коаксиальными цилиндрами, ПММ, т. XXIII, № 4, 1959.

²⁾ Ranque G., Experiments on expansion in a vortex with simultaneous exhaust of hot air and cold air, Journal de Phys. et Rad., т. 7, № 4, 1933.

³⁾ Вулис Л. А., Об эффекте Ранка, Изв. АН СССР, ОТН, № 10, 1957.

Рассмотрим случай $v(r) = Ar$ — квазитвердое течение. В этом случае $T = \text{const}$ [из формулы (7.62)], в то время как температура торможения

$$T_* = T + \frac{v^2}{2c_p} = \text{const} + \frac{A^2}{2c_p} r^2$$

растет с увеличением радиуса вне зависимости от значений P . В другом случае $v(r) = Br^{-1}$ — квазипотенциального течения будем иметь:

$$T = \text{const} - P \frac{v^2}{c_p}, \quad T_* = \text{const} + (1 - 2P) \frac{B^2}{2c_p} \frac{1}{r^2}.$$

Как видно, при $P = 0,5$ температура торможения повсюду постоянна. При $P > 0,5$ температура торможения растет с увеличением радиуса, при $P < 0,5$ — убывает.

В общем случае будем иметь:

$$T_* = \text{const} + \frac{P}{c_p} \left(\frac{v^2}{2} + 2AB \ln r - \frac{B^2}{r^2} \right), \quad (7.63)$$

и только при $P = 0$ температура торможения будет всюду одинакова. Таким образом, в реальном газе ($P > 0$) круговое движение газа характеризуется переменным полем температуры торможения и соответственно местным перераспределением энергии.

Круговое движение в трубке Ранка можно в первом приближении представить так, что в центре трубки имеется квазитвердая область течения ($v = Ar$), а вне ее — область, где $v = A'r + Br^{-1}$, причем на стенке $v = 0$ и $\frac{dT}{dr} = 0$.

Тогда в соответствии со сказанным выше получим возрастающие температуры торможения от оси к периферии.

Более точный количественный результат, учитывающий зависимость вязкости от температуры, можно получить, если использовать данные предыдущего параграфа.

§ 43. Устойчивость течения между двумя вращающимися цилиндрами

Для исследования устойчивости стационарного движения жидкости между двумя вращающимися цилиндрами в предельном случае сколь угодно больших чисел Рейнольдса

можно применить простой способ, предложенный Рэлеем¹⁾.

Рассмотрим какой-нибудь произвольно малый участок жидкости и предположим, что он смещается с траектории своего движения. При этом появляются силы, действующие на смещенный участок жидкости. Для устойчивости основного движения необходимо, чтобы эти силы стремились вернуть смещенный элемент в исходное положение.

Обозначим через $M(r) = mr^2\omega$ момент импульса элемента жидкости, движущегося по радиусу $r = \text{const}$. Центробежная сила $\frac{M^2}{mr^3}$, действующая на этот элемент, уравнивается соответствующим радиальным градиентом давления.

Пусть теперь элемент на радиусе r_0 подвергается малому смещению со своей траектории на радиус $r > r_0$. Сохраняющийся момент импульса будет равен $M_0 = M(r_0)$, а центробежная сила равна $\frac{M_0^2}{mr^3}$. Для того чтобы элемент стремился возвратиться в исходное положение, нужно, чтобы эта центробежная сила была меньше той, которая имеется на расстоянии r от оси, т. е. меньше $\frac{M^2}{mr^3}$. Поэтому необходимым условием устойчивости будет $M^2 - M_0^2 > 0$; разлагая $M(r)$ по степеням положительной разности $r - r_0$, напомним это условие в виде

$$M \frac{dM}{dr} > 0. \quad (7.64)$$

Согласно (7.9) угловая скорость ω частиц в жидкости равна

$$\omega = \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2}.$$

Вычисляя M , равное $mr^2\omega$, и опуская все заведомо положительные множители, получим из (7.64):

$$(\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2) \omega > 0. \quad (7.65)$$

Угловая скорость ω монотонно изменяется с радиусами от ω_1 на внутреннем цилиндре до ω_2 на внешнем цилиндре.

¹⁾ Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1954.

Если цилиндры вращаются в противоположных направлениях, то ω меняет знак в пространстве между цилиндрами, так что условие (7.65) не выполняется во всем объеме жидкости, т. е. движение неустойчиво.

Если оба цилиндра вращаются в одну сторону и $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$, то $\omega > 0$; условие (7.65) примет вид:

$$\omega_2 r_2^2 > \omega_1 r_1^2. \quad (7.66)$$

В противном случае движение неустойчиво. Так, например, если внешний цилиндр покоится ($\omega_2 = 0$), а вращается лишь внутренний, то движение неустойчиво. Напротив, если покоится внутренний цилиндр ($\omega_1 = 0$), то движение устойчиво.

Следует подчеркнуть, что в указанных рассуждениях совершенно не учитывалось влияние вязких сил трения при смещении элемента жидкости, так что полученный результат справедлив при достаточно малой вязкости, т. е. при достаточно больших числах Рейнольдса.

Для определения устойчивости движения при произвольных числах R надо исходить из общего метода наложения на основной поток малых колебаний, подобно тому как это делалось для случая вращающегося диска (§ 12).

Наложим на основной поток [см. уравнение (7.9)]

$$v_r = v_z = 0, \quad v_\varphi = Ar + \frac{B}{r},$$

где

$$A = \frac{r_2^2 \omega_1 - r_1^2 \omega_2}{r_1^2 - r_2^2}, \quad B = \frac{r_1^2 \omega_1 \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2},$$

малые колебания¹⁾

$$v_r' = u_1 \cos \lambda z e^{\beta t}, \quad v_\varphi' = u_2 \cos \lambda z e^{\beta t}, \quad v_z' = u_3 \sin \lambda z e^{\beta t}, \quad (7.67)$$

где u_1, u_2, u_3 — функции одного r .

Напишем уравнения Навье — Стокса (1.1) и вставим введенные значения скоростей, отбрасывая малые второго по-

¹⁾ Taylor G., Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders, Proc. Roy. Soc. (A), т. 223, стр. 289, 1923.

рядка. Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} + 2\left(A + \frac{B}{r^2}\right) v_\varphi' + \nu \left[\frac{\partial^2 v_r'}{\partial z^2} + \Delta_1 v_r' - \frac{v_r'}{r^2} \right] &= \frac{\partial v_r'}{\partial t}, \\ -2A v_r' + \nu \left[\frac{\partial^2 v_\varphi'}{\partial z^2} + \Delta_1 v_\varphi' - \frac{v_\varphi'}{r^2} \right] &= \frac{\partial v_\varphi'}{\partial t}, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 v_z'}{\partial z^2} + \Delta_1 v_z' \right] &= \frac{\partial v_z'}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (7.68)$$

($\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, p' — возмущение давления). Уравнение неразрывности (1.2) примет вид:

$$\frac{\partial (rv_r')}{\partial r} + \frac{\partial (rv_z')}{\partial z} = 0. \quad (7.69)$$

Исключив p' из полученных уравнений, с использованием (7.69) получим:

$$\left. \begin{aligned} \nu \left(\Delta_1 - \frac{1}{r^2} - \lambda'^2 \right) u_2 &= 2A u_1, \\ \nu \frac{d}{dr} \left(\Delta_1 - \lambda'^2 \right) u_3 &= -2 \left(A + \frac{B}{r^2} \right) u_2 - \nu \left(\Delta_1 - \frac{1}{r^2} - \lambda'^2 \right) u_1, \\ \frac{d u_1}{dr} + \frac{u_1}{r} + \lambda u_3 &= 0 \quad \left(\lambda'^2 = \lambda^2 + \frac{\beta}{\nu} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.70)$$

Эту систему уравнений необходимо проинтегрировать при граничных условиях:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0 \quad \text{при } r = r_1 \text{ и при } r = r_2.$$

Решение ищется в виде бесконечных рядов Фурье — Бесселя, расположенных по бесселевым функциям. Подстановка этих рядов в уравнения (7.70) с удовлетворением граничным условиям приводит к бесконечной системе линейных уравнений относительно постоянных коэффициентов рядов. Приравняв определитель системы нулю, получаем вековое уравнение, связывающее при данных ω_1, ω_2, r_1 и r_2 величины β и λ .

Детальный анализ векового уравнения, проведенный Тэйлором, показывает, что при вращении цилиндров в одну

сторону условие (7.66) обеспечивает устойчивость. На рис. 79 дана кривая, представляющая по Тэйлору границу устойчивости в случае $r_1 = 3,55 \text{ см}$, $r_2 = 4,035 \text{ см}$, $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 1,292$. Точками нанесены экспериментальные данные.

При вращении цилиндров в одном направлении потеря устойчивости проявится в возникновении рядов вихрей в плоскости меридиана, имеющих чередующиеся противоположные

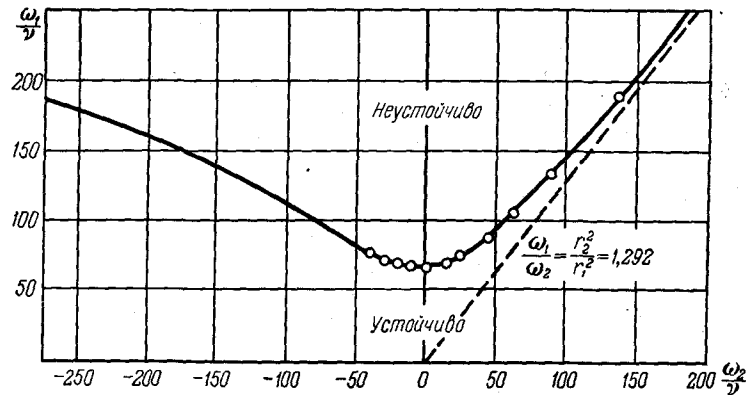


Рис. 79. Граница устойчивости при течении между двумя вращающимися цилиндрами (по Тэйлору).

вращения и занимающих все пространство между цилиндрами (рис. 80). Тэйлор обнаружил возникновение этих вихрей экспериментально, помещая вдоль внутреннего цилиндра тонкий слой окрашенной жидкости; краска располагалась по кольцам, окружающим вихревые области (заштрихованная зона).

При вращении цилиндров в разных направлениях появляются два ряда вихрей с противоположным вращением (рис. 81). Краска распределяется так, как указано на рисунке (заштриховано).

Таким образом, получается поразительное качественное и количественное совпадение теории с опытом.

На основании проведенного Тэйлором анализа была вычислена также критическая скорость, при которой начинают образовываться вихри в случае вращения внутреннего

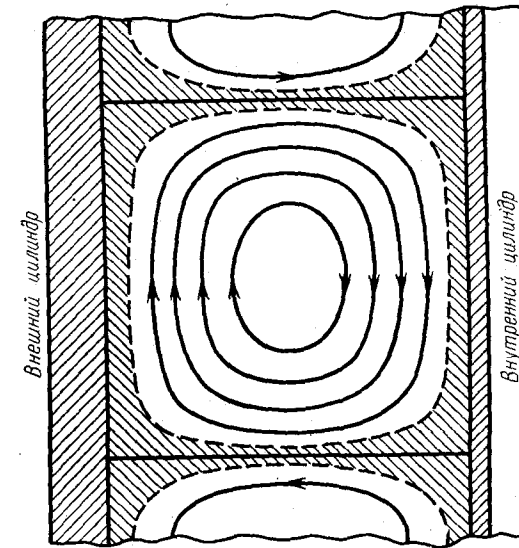


Рис. 80. Картина линий тока вторичного течения между двумя соосными цилиндрами, из которых внутренний вращается, а наружный неподвижен (по Тэйлору).

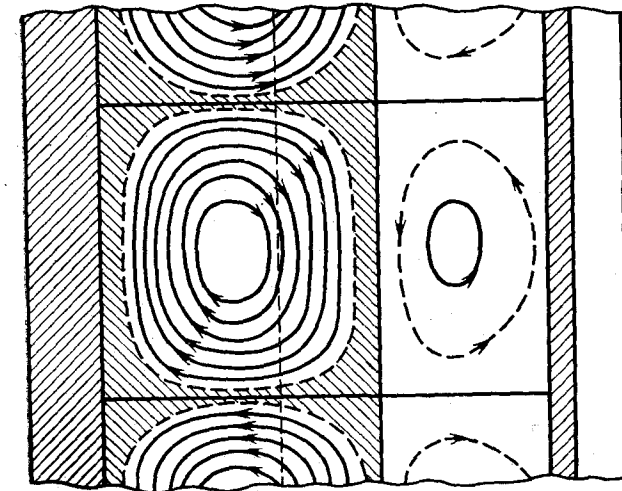


Рис. 81. Картина линий тока вторичного течения между двумя соосными цилиндрами, вращающимися в различных направлениях (по Тэйлору).

цилиндра. При малом отношении $\frac{r_2 - r_1}{r_1}$ эта скорость вычисляется по формуле

$$2 \left[\lg \frac{r_2 \omega_1 (r_2 - r_1)}{\nu} \right]_{\text{кр}} + \lg \frac{r_2 - r_1}{r_1} = 3,232. \quad (7.71)$$

Замеры¹⁾ подтвердили справедливость этого соотношения (рис. 82). На этом же рисунке показана кривая, соответ-

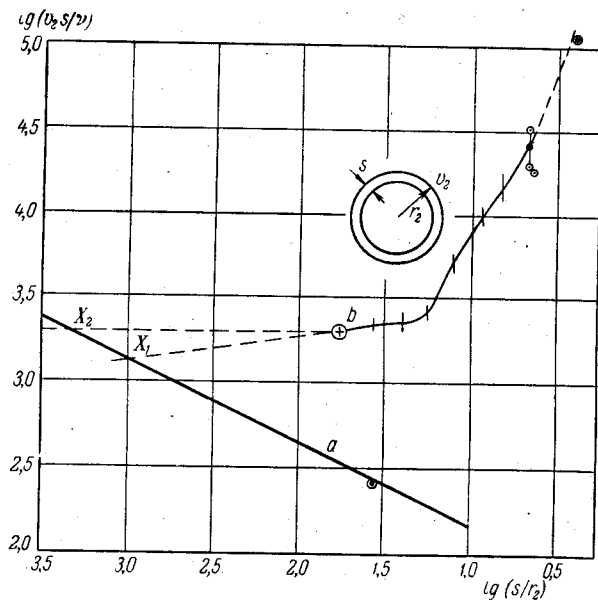


Рис. 82. Критические значения числа Рейнольдса: *a* — при вращении внутреннего цилиндра ($v_2 = r_2 \omega_1$); *b* — при вращении наружного цилиндра ($v_2 = r_2 \omega_2$) (по Тэйлору).

ствующая опытным данным для критической скорости при вращении внешнего цилиндра.

Для оценки отношения $\frac{r_2 - r_1}{r_1}$, при котором на критическую скорость уже не влияет то обстоятельство, вращается ли наружный или внутренний цилиндр, продолжим влево кри-

¹⁾ Taylor G., Fluid friction between rotating cylinder, Proc. Roy. Soc. (A), т. 157, 1936.

вую двумя вероятными линиями, как показано на рис. 82, до пересечения с нижней линией в точках X_1 и X_2 , соответствующих

$$\frac{r_2 - r_1}{r_1} = 10^{-3} \quad \text{и} \quad 0,5 \cdot 10^{-3}.$$

Это означает, что при достаточно малом зазоре $r_2 - r_1 = s$, таком, что $s/r_1 \leq 0,5 \cdot 10^{-3}$, получаются гидродинамические условия, близкие к случаю течения между двумя плоскостями.

Гольдштейн¹⁾ рассмотрел задачу об устойчивости ламинарного потока между двумя цилиндрами при вращении внутреннего цилиндра и осевом течении в зазоре.

Опыты по определению критической скорости в случае такого смешанного потока проводились Корниш²⁾ и Фейджем³⁾. Сводка результатов их опытов в сопоставлении с теоретическими данными Тэйлора и Гольдштейна изображена на рис. 83⁴⁾. Величина V_a обозначает среднюю осевую скорость в зазоре, а величина V_E — эффективную скорость,

$$\text{определяемую формулой } V_E = \sqrt{\left(\frac{1}{2} r_1 \omega\right)^2 + V_a^2}.$$

Кроме вихрей, обнаруженных Тэйлором при потере устойчивости ламинарного течения, Пай⁵⁾ наблюдал вихри, образующиеся при турбулентном режиме в результате вторичных течений.

В последнее время Кэй и Эльгар⁶⁾ провели детальное исследование вихреобразования в зазоре между двумя цилиндрами при вращении внутреннего цилиндра и осевом

¹⁾ Coldstein S., The stability of viscous fluid flow between rotating cylinders, Proc. Cambr. Philos. Soc., т. 33, 1937.

²⁾ Cornish R., Flow of water through five clearances with relative motion of the boundaries, Proc. Roy. Soc. (A), т. 140, 1933.

³⁾ Fage A., The influence of wall oscillations, wall rotation and entry eddies of the breakdown of laminar flow in a pipe, Proc. Roy. Soc. (A), т. 165, 1933.

⁴⁾ Заимствовано из работы Gasley C., Heat-transfer characteristics of the rotation and axial flow between concentric cylinders, Trans. of the ASME, т. 30, № 1, 1958.

⁵⁾ Shih I Pai, Turbulent flow between rotating cylinders, NACA TN 892, 1943.

⁶⁾ Kaye J., Elgar E. C., Modes of adiabatic and diabatic fluid flow in an annulus with an inner rotating cylinder, Trans. of the ASME, т. 80, № 3, 1958.

течении. Если уравнение (7.71) записать при малом s/r_1 в виде:

$$\frac{1}{r_1^2} \frac{s^3}{\nu} = 41,2,$$

то заметим, что потеря устойчивости ламинарного течения характеризуется безразмерным числом $\frac{r_1^{1/2} s^{3/2} \omega}{\nu}$, которое

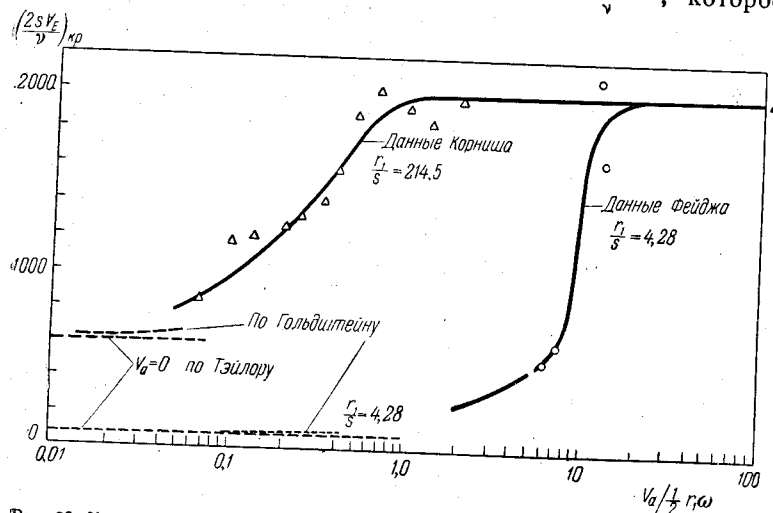


Рис. 83. Критическая скорость при течении в зазоре между вращающимися внутренним и неподвижным внешним цилиндрами в зависимости от соотношения между осевой и окружной скоростью в зазоре.

в честь Тэйлора названо числом Тэйлора. В случае большого зазора вместо радиуса внутреннего цилиндра r_1 удобнее взять для составления числа Тэйлора средний радиус $r_m = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$.

Оказывается, что режимы течения в зазоре характеризуются двумя числами: числом Рейнольдса для осевого течения $\frac{2V_a s}{\nu}$ и числом Тэйлора $\frac{r_m^{1/2} s^{3/2} \omega}{\nu}$. Кэй и Эльгар провели наблюдения режимов течения при разных значениях указанных критериев с помощью термоанемометров и

фотографирования. Оказывается, что существуют четыре режима течения: 1) чисто ламинарное; 2) ламинарное с вихрями Тэйлора; 3) чисто турбулентное; 4) турбулентное

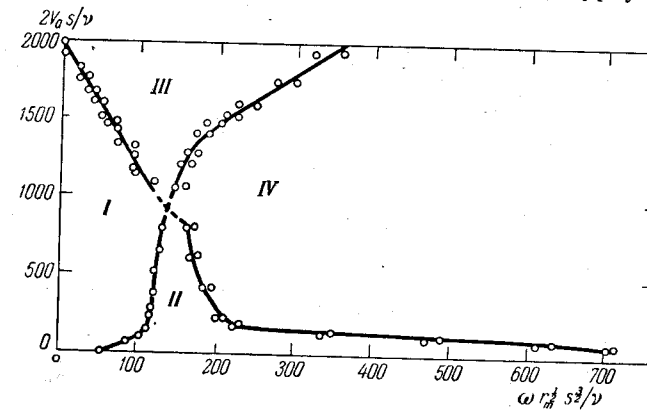


Рис. 84. Распределение режимов течения в зависимости от чисел Рейнольдса $\frac{2V_a s}{\nu}$

и Тэйлора $\frac{r_m^{1/2} s^{3/2} \omega}{\nu}$: I — зона чисто ламинарного течения; II — ламинарное течение с вихрями Тэйлора; III — чисто турбулентное течение; IV — турбулентное течение с завихрениями (по Кэй и Эльгару).

с завихрениями. Характерное распределение этих областей течения в зависимости от критериев Рейнольдса и Тэйлора представлено на рис. 84.

§ 44. Турбулентное течение вокруг вращающегося цилиндра

Наиболее естественным для построения теории турбулентного течения несжимаемой вязкой жидкости вокруг вращающегося цилиндра является обобщение уравнения (7.3)

$$\frac{|\tau|}{\rho} = -\nu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \quad (7.72)$$

путем введения кинематического коэффициента турбулентной вязкости ϵ в виде

$$\frac{|\tau|}{\rho} = -\epsilon r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right). \quad (7.73)$$

При этом следует еще определить закон изменения ε в области течения. В соответствии с теорией турбулентного течения около плоской стенки турбулентная вязкость пропорциональна расстоянию y от стенки:

$$\frac{\varepsilon}{v_*} = \kappa y. \quad (7.74)$$

Здесь $v_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$, а κ — константа турбулентности. Для того чтобы вблизи стенок внутреннего и наружного цилиндров сохранялось это соотношение, естественно положить

$$\frac{\varepsilon}{v_*} = \kappa \frac{(r_2 - r)(r - r_1)}{r_2 - r_1}, \quad (7.75)$$

где r_1 — радиус внутреннего вращающегося цилиндра, а r_2 — радиус наружного неподвижного цилиндра.

С учетом уравнения сохранения момента сил трения (7.2), которое можем записать еще в виде

$$v_* r = v_{*1} r_1, \quad (7.76)$$

получим из уравнений (7.73) и (7.75):

$$\kappa r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) = - \frac{v_* (r_2 - r_1)}{(r_2 - r)(r - r_1)}. \quad (7.77)$$

После интегрирования отсюда получаем:

$$- \frac{r_1}{r} \kappa \frac{v}{v_{*1}} = \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right) \frac{r_1}{r} - \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] \ln r - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \ln (r_2 - r) + \ln (r - r_1) + C. \quad (7.78)$$

Из рассмотрения опытных данных Ваттендорфа¹⁾ и Тэйлора²⁾ характер распределения относительных скоростей в пристеночных слоях вблизи цилиндров сходен с характером распределения скоростей в ламинарном подслое при обтекании плоской пластинки, т. е. имеет линейный характер.

¹⁾ Wattendorf F., A study of the effect of curvature on fully developed turbulent flow, Proc. Roy. Soc. (A), т. 148, № 865, 1935.

²⁾ Taylor G., Distribution of velocity and temperature between concentric rotating cylinder, Proc. Roy. Soc. (A), т. 151, № 874.

Поэтому на границах ламинарных подслоев скорости определяется выражениями:

$$v_{1л} = v_1 - \alpha v_{*1}, \quad v_{2л} = \alpha v_{*2} = \alpha \frac{v_{*1} r_1}{r_2}, \quad (7.79)$$

а соответствующие толщины этих подслоев будут равны

$$\delta_{1л} = \frac{\alpha \nu}{v_{*1}}, \quad \delta_{2л} = \frac{\alpha \nu}{v_{*2}} = \frac{\alpha \nu r_2}{v_{*1} r_1}, \quad (7.80)$$

где α — некоторая постоянная, которую мы полагаем одинаковой для обоих цилиндров.

Подставив значения скорости (7.79) и толщин (7.80) в уравнение (7.78), получим после исключения постоянной C уравнения, определяющие распределение скоростей и закон сопротивления.

Для закона сопротивления вращающегося цилиндра получаем:

$$\kappa \frac{v_1}{v_{*1}} = \kappa \alpha \left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] - \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right)^2 + \ln \left(1 + \frac{v_{*1} r_1}{\alpha \nu} \right) \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right) + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right) \left(\frac{v_{*1} r_1}{\alpha \nu} - 1 \right). \quad (7.81)$$

Распределение скоростей определяется формулой

$$\frac{r_1}{r} \kappa \frac{v}{v_{*1}} = \kappa \left(\frac{v_1}{v_{*1}} - \alpha \right) + \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right) - \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right) \frac{r_1}{r} - \ln \frac{r - r_1}{r} - \ln \left(1 + \frac{v_{*1} r_1}{\alpha \nu} \right) - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \ln \frac{r}{r_2 - r} \frac{r_2 - r_1}{r_1}. \quad (7.82)$$

Постоянные κ и α определим из опытных данных Ваттендорфа¹⁾, а затем проверим их приемлемость по другим опытным данным. Построим величину $\frac{r_1}{r} \frac{v}{v_{*1}}$ в зависимости от значений f — правой части формулы (7.78) без постоянной C — по замеренным величинам скоростей в зазоре между вращающимся внутренним цилиндром радиуса 200 мм и неподвижным соосным наружным цилиндром радиуса 254 мм (рис. 85). Значения v_{*1} подставлялись согласно опытным данным Тэйлора²⁾ о напряжении трения τ вращающихся цилиндров.

¹⁾ См. сноску 1) на стр. 194.

²⁾ См. сноску на стр. 190.

Полученные графики, за исключением пристеночных участков, близки к прямым. Тангенс угла наклона этих пря-

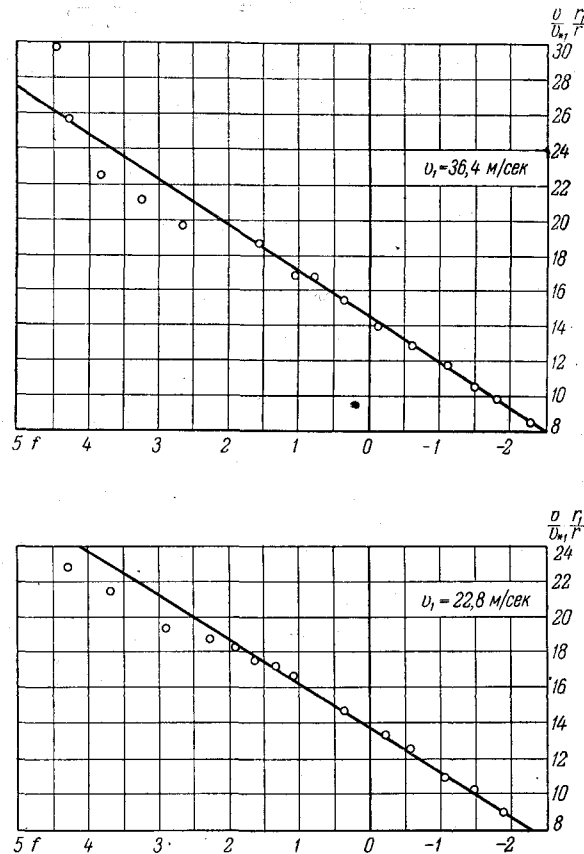


Рис. 85. Распределение скоростей между соосными цилиндрами при вращении внутреннего цилиндра (согласно опытным данным Ваттендорфа).

мых равен $1/\kappa = 2,5$, т. е. $\kappa = 0,4$, как для случая турбулентного течения вблизи плоской стенки. Другую постоянную, α , можно определить по координате точек пересечения указанных прямых с прямой $f=0$. При этом, согласно (7.82),

получим следующее уравнение для определения постоянной α :

$$\left(-\frac{r_1}{r} \kappa \frac{v}{v_{*1}}\right)_{f=0} = -\kappa \left(\frac{v}{v_{*1}} - \alpha\right) - \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) + \\ + \ln\left(\frac{v_{*1} r_1}{\alpha v} + 1\right) + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \ln \frac{r_2 - r_1}{r_1}. \quad (7.83)$$

При окружной скорости $v_1 = 36,4$ м/сек вращения внутреннего цилиндра в воде ($\nu \approx 10$ м²/сек), согласно опытным данным Тэйлора, будем иметь $v_1/v_{*1} = 45,2$, а точка пересечения с $f=0$ дает здесь (см. рис. 85) $\frac{v}{v_{*1}} \frac{r_1}{r} = 14,5$. В этом случае уравнение (7.83) дает решение $\alpha \approx 8$.

При скорости $v_1 = 22,8$ м/сек будем иметь $v_1/v_{*1} = 42,2$, $\left(\frac{r_1}{r} \frac{v}{v_{*1}}\right) = 13,7$, так что уравнение (7.83) дает $\alpha \approx 7$. Следовательно, среднее значение постоянной α равно 7,5.

Положим в формулах (7.81) и (7.82) значения постоянных $\kappa = 0,4$, $\alpha = 7,5$ и сравним результаты расчетов по этим формулам с известными опытными данными.

Рассмотрим результаты замеров Тэйлора¹⁾ распределения скоростей воздуха в пространстве между вращающимся с угловой скоростью $\omega = 252$ 1/сек цилиндром радиуса $r_1 = 2,062$ см и неподвижным цилиндром радиуса $r_2 = 4,035$ см. На рис. 86 кружочками отмечены скорости, определенные с помощью замеров трубкой полного давления диаметром 0,48 мм, а квадратиками обозначены скорости, полученные при экстраполяции на нулевую толщину трубки. Сплошная линия, обозначающая результат расчета (при $\kappa = 0,4$; $\alpha = 7,5$), располагается в достаточной близости от опытных точек. Учитывая трудности замеров в малом зазоре между цилиндрами и то, что скорости определялись расчетом по замерам полных давлений, следует признать удовлетворительным согласование между теорией и опытом.

Удовлетворительное соответствие имеется также между расчетными и опытными значениями коэффициентов сопротивления вращающихся цилиндров. На рис. 87 представлены опытные значения $\tau_2/\rho v_2^2 = (v_{*2}/v_2)^2$ (τ_2 — напряжение трения на внешнем цилиндре, $v_2 = r_2 \omega$ — относительная скорость

1) См. сноску 2) на стр. 194.

вращения внешнего цилиндра), полученные Тэйлором¹⁾ в результате замеров крутящего момента. Для каждого значения относительного зазора s/r_2 получены отдельные кривые; сплошные линии соответствуют случаю, когда вращается внутренний цилиндр, а пунктирные линии — случаю, когда

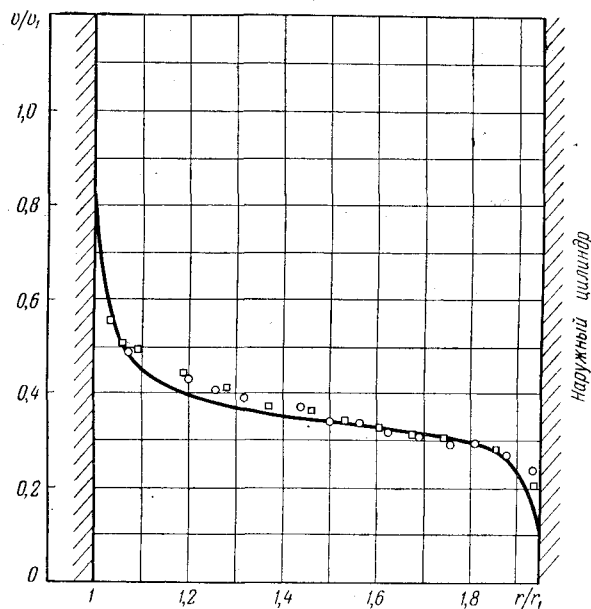


Рис. 86. Сравнение замеренных и вычисленных скоростей в зазоре между вращающимися в воздушной среде цилиндром радиуса $r_1=2,062$ см и наружным неподвижным цилиндром радиуса $r_2=4,035$ см. Сплошная линия получена расчетом по формуле (7.82); опытные точки — по замерам Тэйлора при $\omega=252$ сек⁻¹.

вращается внешний цилиндр. Прямые, расположенные под 45° к осям, соответствуют теоретическим результатам для ламинарного режима [формула (7.10)].

Влияние устойчивости, которая характеризует движение в случае вращения внешнего цилиндра, сводится к уменьшению трения. Неустойчивость, вызываемая кривизной при вращении внутреннего цилиндра, по-видимому, не оказывает влияния на сопротивление. Опытные значения при этом близки

¹⁾ См. сноску на стр. 190.

к расчетным, подсчитанным по формуле (7.81); последние изображены штрих-пунктирными линиями. Наибольшее различие имеется в зоне перехода от ламинарного к турбулентному режиму.

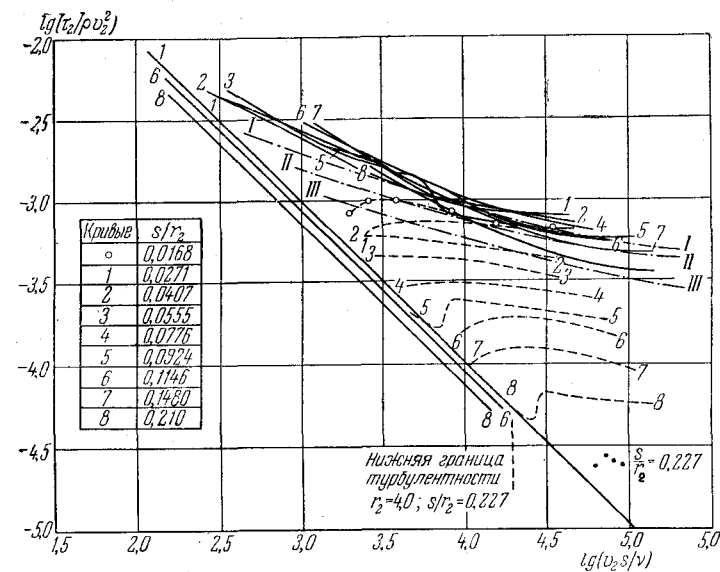


Рис. 87. Напряжения трения τ_2 на внешнем цилиндре для вращающихся соосных цилиндров по опытам Тэйлора: — при вращении внутреннего цилиндра ($U_2=\omega_1 r_2$); - - - при вращении внешнего цилиндра ($U_2=\omega_2 r_2$); - · - · - расчет по формуле (7.81) при вращении внутреннего цилиндра (I — при $s/r_2=0$, II — при $s/r_2=0,09$, III — при $s/r_2=0,23$); светлые кружки — опытные точки Куэтта.

Вращение цилиндра в неограниченном пространстве. Рассмотрим случай вращения цилиндра в неограниченном пространстве. Переходя в формуле (7.81) к пределу при $r_2 \rightarrow \infty$, получим следующее выражение для закона сопротивления:

$$\kappa \frac{v_1}{v_{s1}} = \kappa \alpha - 1 + \ln \left(1 + \frac{v_{s1} r_1}{\alpha v} \right). \quad (7.84)$$

При больших числах $R = \frac{v_1 r_1}{v}$

$$\ln \left(1 + \frac{v_{s1} r_1}{\alpha v} \right) = \ln \left(1 + \frac{v_{s1}}{v_1 \alpha} R \right) \approx \ln \frac{v_{s1}}{v_1 \alpha} R,$$

так что формула (7.84) примет (при $\kappa = 0,4$, $\alpha = 7,5$) вид:

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = -0,6 + 4,07 \lg R \sqrt{c_f}, \quad (7.85)$$

где $c_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2} \rho r_1^2 \omega_1^2}$ — коэффициент сопротивления.

Именно в таком виде Теодорсен и Регир¹⁾ получили формулу, интерполирующую результаты их опытов (рис. 88).

Турбулентное течение Куэтта. Другой предельный случай получается при $r_1, r_2 \rightarrow \infty$. Этот случай относится к течению между двумя параллельными стенками, из которых одна неподвижная, а другая движется в своей плоскости с постоянной скоростью v_1 (течение Куэтта). Из уравнения (7.76) следует, что $v_* = \text{const}$ между стенками.

Формула сопротивления (7.81) при таком течении принимает вид:

$$\kappa \frac{v_1}{v_{*1}} = 2\kappa\alpha + 2 \ln \frac{v_{*1}s}{\alpha\nu}, \quad (7.86)$$

где $s = r_2 - r_1$ — расстояние между стенками. При $\alpha = 7,5$, $\kappa = 0,4$ эта формула представляется следующим образом:

$$\frac{v_1}{v_{*1}} = 4,94 + 11,5 \lg \frac{v_{*1}}{v_1} R_s, \quad R_s = \frac{sv_1}{\nu}, \quad (7.87)$$

Распределение скоростей (7.82) при $r_1, r_2 \rightarrow \infty$ будет выражаться формулой

$$\kappa \frac{v}{v_{*1}} = \kappa \frac{v_1}{v_{*1}} - \kappa\alpha - \ln \frac{sv_{*1}}{\alpha\nu} \frac{r - r_1}{r_2 - r_1},$$

что с учетом (7.87) даст следующее выражение:

$$\frac{v}{v_{*1}} = \frac{1}{2} \frac{v_1}{v_{*1}} - 5,75 \lg \frac{y}{1 - \frac{y}{s}}, \quad (7.88)$$

где $y = r - r_1$ — расстояние от движущейся стенки.

Рейхардт²⁾ измерял профили скоростей при течении Куэтта. До некоторого критического значения числа

1) См. сноску 1) на стр. 21.

2) Reichardt H., Über die Geschwindigkeitsverteilung in einer geradlinigen turbulenten Cuetteströmung, ZAMM, 1956, Sonderheft.

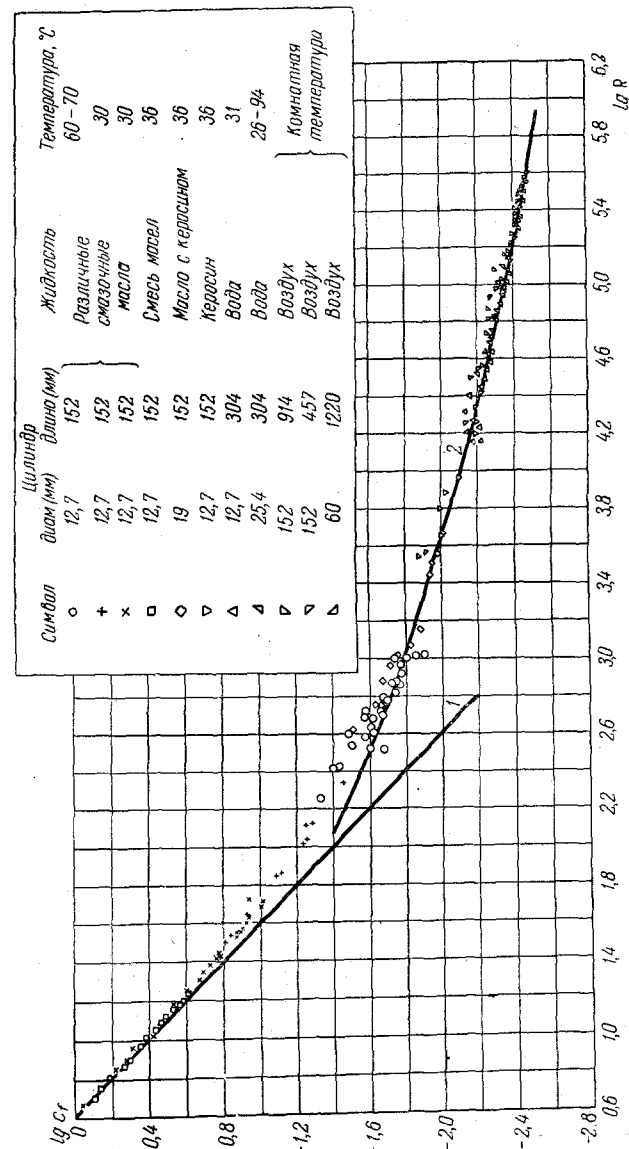


Рис. 88. Коэффициент трения гладкой поверхности вращающегося цилиндра в зависимости от числа Рейнольдса (по опытам Теодорсена и Регира): 1 — ламинарное течение, $c_f = 4/R$; 2 — турбулентное течение, по формуле (7.85).

Рейнольдса $(R_s)_{кр} = 3000$ профили скоростей имеют линейный характер, что соответствует простому ламинарному течению Куэтта. Затем с увеличением чисел Рейнольдса профили скоростей начинают искривляться (рис. 89). Сплошными линиями для чисел Рейнольдса $R_s = 36000$ и $R_s = 5800$ обозначены

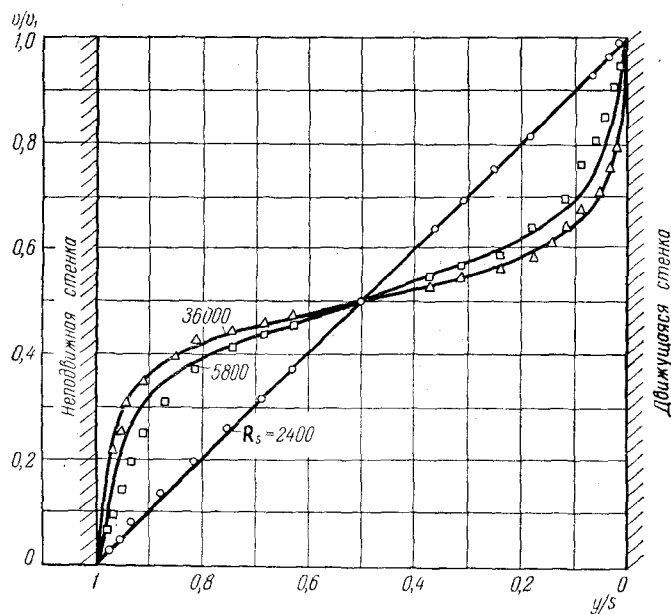


Рис. 89. Профили скоростей при течении Куэтта. Опытные точки получены по замерам Рейхардта, сплошные линии — по формуле (7.88).

результаты вычислений по формуле (7.88) при законе сопротивления (7.87). При достаточно больших числах Рейнольдса получается хорошее соответствие между опытными и расчетными данными.

Влияние шероховатости. Теодорсен и Регир изучили влияние шероховатости на сопротивление трения цилиндра, вращающегося в неограниченном пространстве¹⁾. На рис. 90 приведены результаты измерений коэффициента сопротивления для случая предельно плотной песочной шероховатости. Эти результаты согласуются с теми предста-

¹⁾ См. сноску на стр. 21.

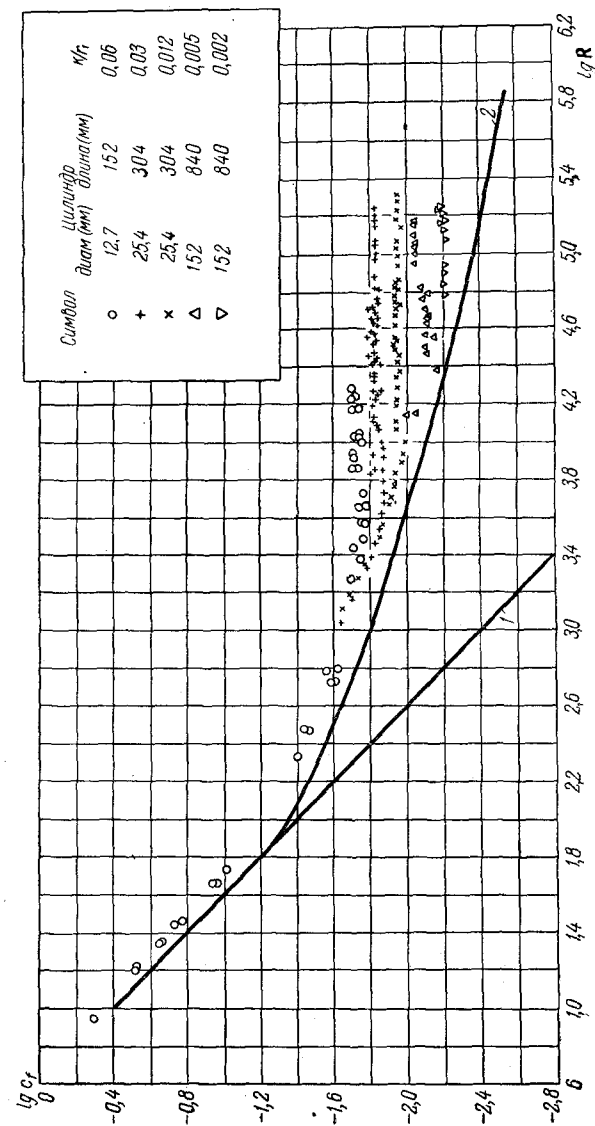


Рис. 90. Коэффициент трения вращающегося цилиндра, покрытого предельно плотной песочной шероховатостью: 1 — гладкий цилиндр, ламинарное течение; 2 — шероховатый цилиндр, турбулентное течение (по Теодорсену и Регир).

влениями, которые получены для сопротивления шероховатых труб и пластинок. Как только величина k бугорков шероховатости становится соизмеримой с толщиной ламинарного подслоя δ_{*1} , начинается проявление шероховатости. Величина δ_{*1} пропорциональна отношению ν/v_{*1} , поэтому естественно, что критическая величина бугорка шероховатости также пропорциональна ν/v_{*1} . Опыты с трубами и пластинками дают для множителя пропорциональности значение 3,3, т. е. $k_{кр} \approx 3,3 \frac{\nu}{v_{*1}}$.

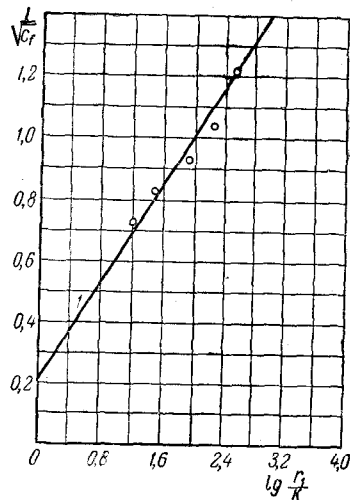


Рис. 91. Сопротивление вращающегося шероховатого цилиндра: 1 — по формуле (7.89), ○ — по опытам Теодорсена и Регира.

Это, с другой стороны, означает также, что для данной величины шероховатости k критическим значением для величин v_{*1}/ν является $(\frac{v_{*1}}{\nu})_{кр} = \frac{3,3}{k}$.

Так как с началом проявления шероховатости сопротивление практически перестает зависеть от числа R , то оно должно определяться формулой (7.85) для критического значения v_{*1}/ν . Подстановка

этого значения в указанную формулу дает следующий закон сопротивления:

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = -0,6 + 4,07 \lg 3,3 \sqrt{2} \frac{r_1}{k} = 2,12 + 4,07 \lg \frac{r_1}{k}. \quad (7.89)$$

Полученный результат хорошо согласуется с опытными данными, как это видно из рис. 91.

При изменении плотности насыщения зернами шероховатости поверхности вращающегося цилиндра кривая сопротивления $\lg c_f$ уже перестает быть параллельной оси $\lg R$, а принимает определенный наклон (рис. 92), тем больший, чем меньше плотность насыщения поверхности зернами шероховатости, постепенно приближаясь к кривой для гладкого цилиндра. Все данные, приведенные на рис. 92, получены Теодорсеном и Региром при одинаковой относительной

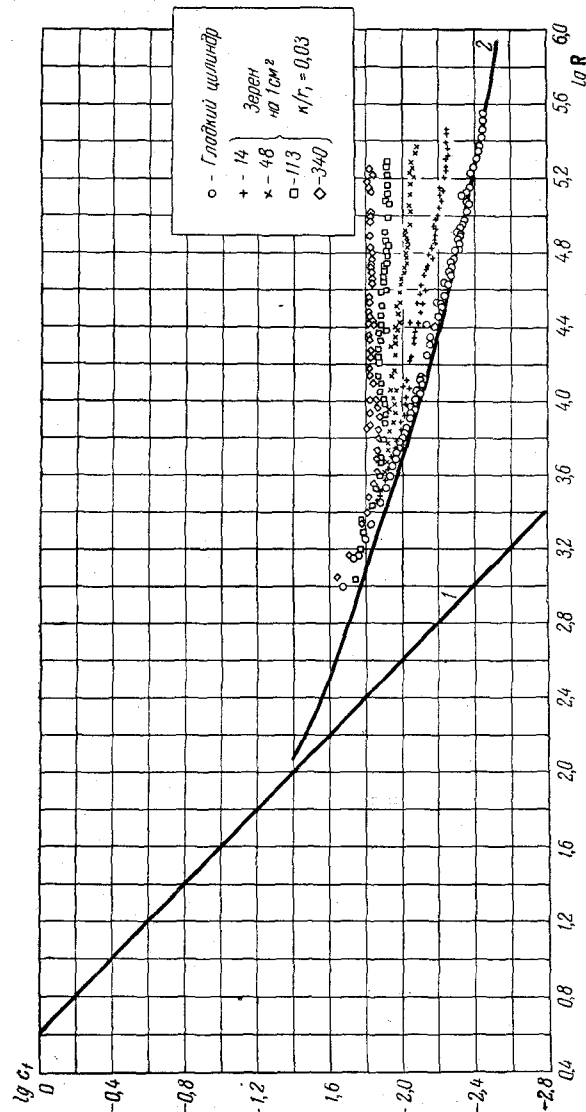


Рис. 92. Влияние плотности насыщения зернами шероховатости на коэффициент трения вращающегося цилиндра: 1 — ламинарный режим, $c_f = 4/R$; 2 — турбулентный режим, по формуле (7.85) (по Теодорсену и Регире).

шероховатости $k/r_1 = 0,03$. Из опытов видно, что критическое значение числа Рейнольдса, при котором начинается проявление данной шероховатости, зависит не от плотности ее насыщения, а только от величины k/r_1 .

§ 45. Теплоотдача при вращении кругового цилиндра для турбулентного режима

Пусть на поверхности нагреваемого цилиндра радиуса r_1 , вращающегося с угловой скоростью ω_1 , поддерживается постоянная температура T_1 , а наружный соосный неподвижный цилиндр имеет температуру T_2 . Рассмотрим, как распределяется температура в пространстве между цилиндрами при турбулентном режиме течения.

Обозначим распределение безразмерных температур в виде

$$g(\xi) = \frac{T_1 - T}{T_{*1}}, \quad (7.90)$$

где

$$T_* = \frac{q}{\rho c_p v_*}, \quad \xi = \frac{r v_{*1}}{\nu}, \quad (7.91)$$

q — секундный поток тепла.

Так как через произвольное цилиндрическое сечение проходит одинаковое количество тепла, то

$$qr = \text{const}, \quad (7.92)$$

что совместно с (7.76) дает

$$T_* = T_{*1} = \text{const}. \quad (7.93)$$

Обобщая известное для ламинарного течения уравнение Фурье $q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$ на турбулентный режим, можно уравнение для теплового потока записать в виде

$$\frac{q}{\rho c_p} = -\varepsilon_T \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (7.94)$$

Основываясь на подобии механизма переноса тепла и количества движения, можем полагать, что $\varepsilon_T = \varepsilon$. Тогда, используя формулу (7.75) для $\varepsilon = \varepsilon_T$ и введенные обозначения, получим, что вне зоны, где влияют молекулярная вяз-

кость и проводимость, имеется следующий профиль температур:

$$g = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi} + C. \quad (7.95)$$

Легко заметить, что постоянная C равна значению g в середине зазора между цилиндрами:

$$C = g \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}.$$

Опыты Тэйлора по замеру профиля температур показывают (рис. 93), что в основной части зазора, вне пристеноч-

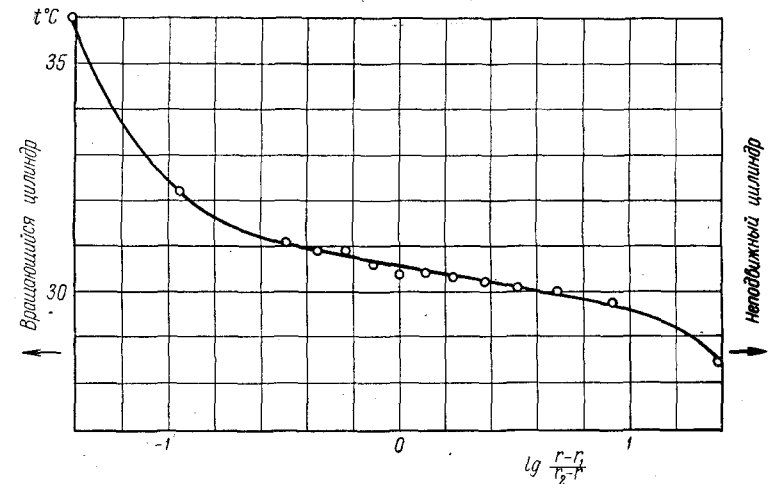


Рис. 93. Распределение температур в зазоре между внутренним вращающимся и наружным неподвижным цилиндрами (по опытам Тэйлора).

ных зон, распределение температур имеет характер, соответствующий полученной формуле.

В случае, когда цилиндр вращается в неограниченном пространстве ($r_2 = \infty$), имеем в соответствии с (7.75):

$$\varepsilon_T = \varepsilon = \kappa v_* (r - r_1),$$

что дает для профиля температур выражение

$$g = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y v_*}{\nu} + \text{const}. \quad (7.96)$$

Такой же вид имеет формула для распределения безразмерных температур вблизи плоской стенки, движущейся в своей плоскости со скоростью v_1 , при динамической скорости $v_{*1} = \sqrt{\frac{\tau_1}{\rho}}$.

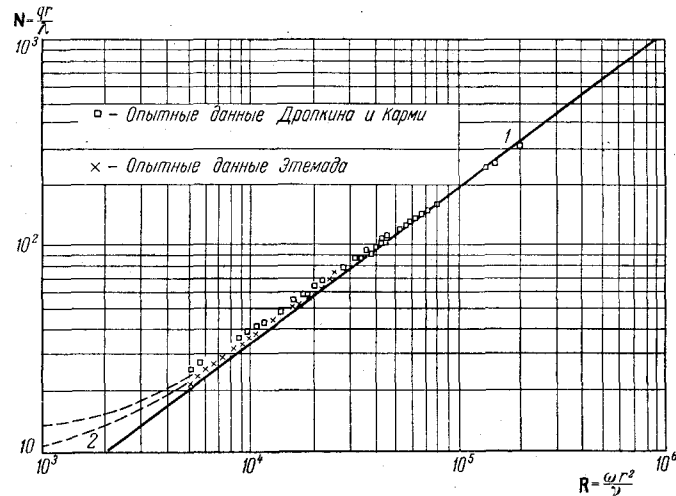


Рис. 94. Теплоотдача вращающегося цилиндра: 1 — расчет по формуле (7.97); 2 — область влияния естественной конвекции.

Поэтому и закон теплоотдачи должен иметь такой же вид, который получен для плоской стенки¹⁾:

$$N = \frac{\alpha r}{\lambda} = PR \frac{\frac{\tau_1}{\rho v_1^2}}{1 + \sqrt{\frac{\tau_1}{\rho v_1^2} \left[5(P-1) + 5 \ln \frac{5P+1}{6} \right]}}, \quad (7.97)$$

где $v_1 = r_1 \omega$, $R = r_1 v_1 / \nu$.

На рис. 94 квадратиками нанесены результаты опытов Дропкина и Карми²⁾ для воздуха, крестиками — результаты

¹⁾ См. сноску¹⁾ на стр. 104.

²⁾ Dropkin D., Karimi A., Natural-convection heat transfer from a horizontal cylinder rotating in air, Trans, ASME, т. 79, № 4, 1957.

опытов Этемада¹⁾, а сплошной линией 1 — расчет по формуле (7.97). Если учесть, что при малых числах Рейнольдса имеет заметное влияние естественная конвекция, то можно говорить о хорошем соответствии между опытными и расчетными данными.

Влияние естественной конвекции можно выразить формулой²⁾

$$N = 0,228 (G \times P)^{0,25}. \quad (7.98)$$

Здесь G — число Грасгофа:

$$G = \beta g \theta d^3 \frac{\rho^2}{\mu^2},$$

где β — коэффициент объемного расширения, θ — температурный напор, d — диаметр цилиндра. Две пунктирные линии на рис. 94 представляют влияние естественной конвекции в опытах Этемада.

Андерсон и Саундерс³⁾ исследовали вопрос о величине критического числа Рейнольдса, начиная с которого уже проявляется влияние вращения на теплоотдачу горизонтального цилиндра. Их данные приблизительно описываются формулой

$$R_{кр} = 0,55 \sqrt{\frac{G}{P}}, \quad (7.99)$$

В работе приведены также некоторые результаты замеров профилей температур и коэффициентов теплоотдачи вращающихся цилиндров.

В цитированной выше работе Дропкина и Карми получена эмпирическая формула для теплоотдачи вращающегося цилиндра, учитывающая влияние естественной конвекции и вращения:

$$N = 0,095 (2R^2 + G)^{0,35}. \quad (7.100)$$

¹⁾ Etemad G. A., Free-convection heat transfer from a rotating horizontal cylinder to ambient air with interferometric study of flow, Trans. ASME, т. 77, № 8, 1955.

²⁾ Mac Adams W. H., Heat transmission, Mc Graw Hill, 1942.

³⁾ Anderson J. T. and Saunders O. A., Convection from an isolated heated horizontal cylinder rotating about its axis, Proc. Roy. Soc. (A), т. 217, № 1131, 1953.

Кэйс и Берклунд¹⁾ исследовали еще дополнительное влияние на теплоотдачу вращающегося цилиндра обдува его поперечным потоком со скоростью V_s . Их опытные данные описываются эмпирической формулой вида

$$N = 0,135 [(2R^2 + R_s^2 + G)P]^{\frac{1}{3}}, \quad (7.101)$$

где R_s — число Рейнольдса, характеризующее поперечный поток:

$$R_s = \frac{2r_1 V_s}{\nu}.$$

Для определения коэффициента теплоотдачи в зазоре между внутренним вращающимся цилиндром и неподвижным внешним цилиндром примем простейшую гипотезу о том, что граница динамического ламинарного подслоя совпадает с границей теплового ламинарного подслоя. Ввиду малой толщины подслоя профили скоростей и температур в нем такие же, как вблизи плоской стенки:

$$g = P(\xi - \xi_1). \quad (7.102)$$

Для срачивания с профилем температур (7.95) на границах подслоя $\xi - \xi_1 = 7,5$ необходимо, чтобы постоянная C равнялась

$$C = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\xi_2 - \xi_1 - 7,5}{7,5} + 7,5P. \quad (7.103)$$

Если относительный зазор s/r_1 не очень велик, то постоянная C есть среднее значение $g(\xi)$ в зазоре, т. е.

$$C = \frac{T_1 - T_2}{2T_*}.$$

Поэтому безразмерный коэффициент теплоотдачи будет равнятьсяся

$$N_s = \frac{2q_1 s}{(T_1 - T_2)\lambda} = R_s P \frac{v_{*1}}{v_1 C} \quad \left(R_s = \frac{s r_1 \omega}{\nu} \right), \quad (7.104)$$

где C определяется формулой (7.103).

¹⁾ Kays W. M. and Bjorklund J. S., Heat transfer from a rotating cylinder with and without crossflow, Trans. ASME, т. 80, № 1, 1958.

На рис. 95 приведены опытные данные Газлея¹⁾ для коэффициента теплоотдачи в зависимости от R_s при двух значениях относительного зазора $s/r_1 = 0,068$ и $s/r_1 = 0,095$. Нанесенные там же кривые для турбулентного режима, вычисленные по формуле (7.104), близки к опытным данным. При этом значения v_{*1}/v_1 брались по опытным кривым рис. 87.

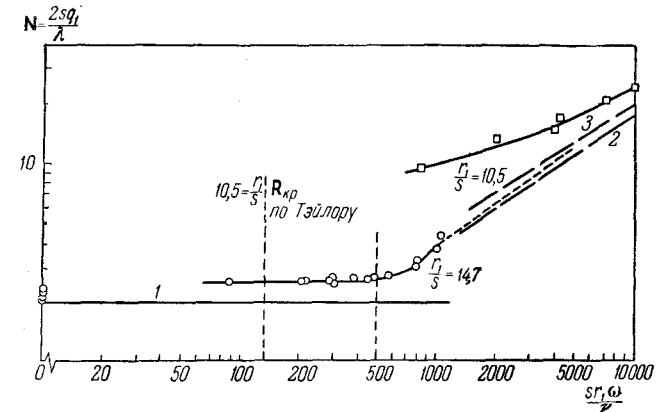


Рис. 95. Теплоотдача цилиндра, вращающегося внутри соосного неподвижного цилиндра: 1 — теоретическая кривая для ламинарного режима; 2 и 3 — кривые, вычисленные по формуле (7.104) (по опытам Газлея).

Теоретическая кривая для ламинарного режима взята по формуле (7.14) для малого относительного зазора и малых скоростей ($m = 0$); она дает $N_s = 2$. Превышение опытных значений чисел N_s над расчетными можно объяснить, в частности, влиянием естественной конвекции.

Как показывает рис. 95, с увеличением относительного зазора увеличивается протяженность переходной зоны. Начало переходной зоны соответствует расчетным данным Тэйлора [формула (7.1)].

Для больших зазоров удобнее рассматривать коэффициент теплоотдачи, подсчитанный по температурному напору от поверхности цилиндра до середины зазора. В этом случае

$$N_{r_1} = \frac{2q_1 s}{(T_1 - T_{cp})\lambda} = 2R_s P \frac{v_{*1}}{v_1 C}.$$

¹⁾ См. сноску ⁴⁾ на стр. 191.

В работе Газлея приводятся также данные по теплоотдаче при наличии осевого течения в зазоре. На рис. 96 представлены значения N_s для теплоотдачи с поверхности цилиндра в зависимости от числа Рейнольдса, составленного по эффективной скорости V_E . Ввиду стабилизирующего влияния осевого течения увеличивается критическое значение числа

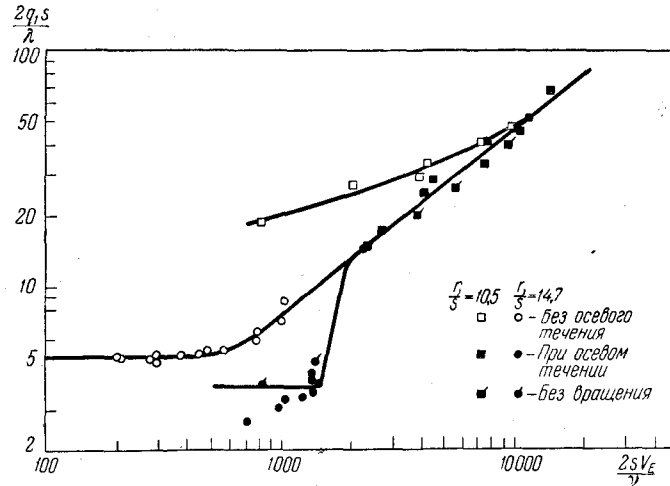


Рис. 96. Влияние осевого течения в зазоре между соосными цилиндрами на теплоотдачу внутреннего цилиндра (по Газлею).

Рейнольдса, что приводит к уменьшению коэффициента теплоотдачи при докритических числах Рейнольдса по сравнению со случаем, когда нет осевого течения. При больших числах Рейнольдса значения коэффициентов теплоотдачи почти однозначно определяется числом R_E независимо от наличия или отсутствия осевого течения между цилиндрами.

§ 46. О нестационарном вращении цилиндра

В заключение настоящей главы рассмотрим случай ускоряющегося или замедляющегося вращения цилиндра в вязкой несжимаемой жидкости при ламинарном течении¹⁾.

¹⁾ Müller W., Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten, Leipzig, 1932.

С учетом условий (7.1) уравнение плоского неустановившегося течения вокруг вращающегося цилиндра в соответствии с уравнениями (1.1) примет вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (7.105)$$

Если ограничиться течениями вида

$$v = e^{-\beta t} \chi(r), \quad (7.106)$$

то получим из (7.105) обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\chi(r)$:

$$\chi'' + \frac{1}{r} \chi' + \left(\frac{\beta}{\nu} - \frac{1}{r^2} \right) \chi(r) = 0, \quad (7.107)$$

общим решением которого является

$$\chi(r) = C_1 J_1(kr) + C_2 N_1(kr), \quad (7.108)$$

где J_1 и N_1 — функции Бесселя первого порядка, а $k = \sqrt{\frac{\beta}{\nu}}$. В случае ускоряющегося вращения, когда β отрицательно, будем иметь функции Бесселя мнимого аргумента, или если ввести обычные обозначения

$$-iJ_1(ikr) = I_1(kr),$$

$$K_1(kr) = -\frac{\pi}{2} [J_1(ikr) + N_1(ikr)],$$

то $\chi(r)$ будет линейной комбинацией I_1 и K_1 .

Пусть, например, цилиндр радиуса r_1 вращается со скоростью $v_1 e^{-\beta t}$, в то время как жидкость под торможается наружным неподвижным concentричным цилиндром радиуса $r_2 > r_1$; тогда постоянные легко определяются, и находится решение. При замедляющемся движении, например, оно имеет вид:

$$v = v_1 e^{-\beta t} \begin{vmatrix} J_1(kr) & J_1(kr_2) \\ N_1(kr) & N_1(kr_2) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} J_1(kr_1) & J_1(kr_2) \\ N_1(kr_1) & N_1(kr_2) \end{vmatrix}. \quad (7.109)$$

Если в случае экспоненциально ускоряющегося вращения внутреннего цилиндра скорость жидкости монотонно убывает до нуля от внутреннего к наружному цилиндру, то в случае замедляющегося вращения от цилиндра отходят

своего рода стоячие волны, узловые точки которых определяются нулями функции

$$J_1(kr)N_1(kr_2) - J_1(kr_2)N_1(kr) = 0.$$

Для ускоряющегося вращения цилиндра в неограниченной среде будем иметь:

$$v = v_1 e^{\beta t} \frac{K_1\left(r \sqrt{\frac{\beta}{\nu}}\right)}{K_1\left(r_1 \sqrt{\frac{\beta}{\nu}}\right)}. \quad (7.110)$$

Более общее решение, которым можно приблизиться к любому заданному закону изменения скорости вращения во времени, можно получить, если представить его в виде

$$v = \sum_i e^{-\lambda_i^2 t} C_i J_1(\lambda_i r),$$

где неизвестные постоянные C_i находятся по начальным условиям. В предельном случае бесконечная сумма переходит в интеграл.

В книге Н. А. Слезкина¹⁾ рассмотрена следующая задача. Цилиндр, находящийся в неограниченной неподвижной жидкой среде, внезапно приводится во вращение с некоторой постоянной угловой скоростью. Полученное решение показывает, что со временем повсюду достигается стационарное состояние, которое распространяется, приближаясь к цилиндру из бесконечности [см. также работу Д. Маллика²⁾].

¹⁾ Слезкин Н. А., Динамика вязкой несжимаемой жидкости, Гостехиздат, 1955, стр. 330.

²⁾ Mallick D., Nonuniform rotation of an infinite circular cylinder in an infinite viscous liquid, ZAMM, т. 37, № 9/10, 1957.

ГЛАВА VIII

ВРАЩЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА В ОСЕВОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

§ 47. Составление интегральных соотношений импульсов

Рассмотрим установившееся ламинарное течение при осевом обтекании произвольного осесимметричного вращающегося тела. В качестве криволинейных координатных линий примем: ось x — вдоль меридионального сечения поверхности, ось y — вдоль сечения поверхности плоскостью, перпендикулярной к оси вращения, ось z — перпендикулярно к касательной плоскости.

Тогда вблизи поверхности элемент пространственной дуги будет выражаться в виде

$$ds^2 = dx^2 + R^2(x) d\varphi^2 + dz^2,$$

где $R(x)$ — расстояние от оси вращения. Коэффициенты Ламе поэтому будут равны

$$H_x = 1, \quad H_\varphi = R(x), \quad H_z = 1.$$

Используя их, можно векторное уравнение изотермического движения несжимаемой жидкости¹⁾

$$\frac{dV}{dt} = F - \text{grad } p + \nu \nabla^2 V$$

представить для системы координат x, φ, z в виде соответствующей системы дифференциальных уравнений.

Если в полученных уравнениях из вязких членов оставить лишь члены, содержащие производные по нормали

¹⁾ Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, Гостехиздат, 1957.

к соответствующим координатным плоскостям, то получим уравнения пограничного слоя. При этом полагаем также, что давление постоянно по всей толщине пограничного слоя, так что величина $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ определится через значения скоро-

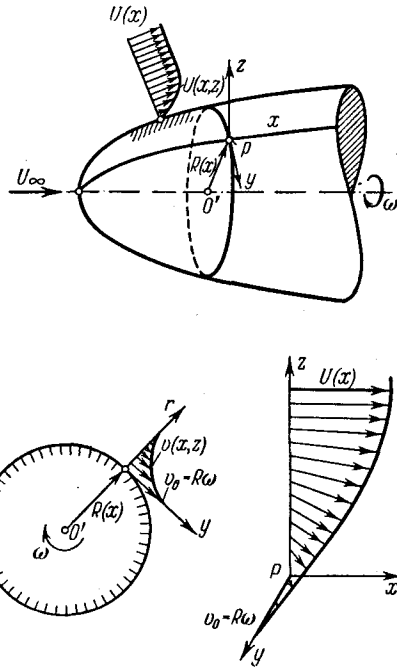


Рис. 97. Схема течения вокруг вращающегося в осевом потоке осесимметричного тела.

стей $U(x)$ на внешней границе пограничного слоя по уравнению Бернулли:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -U \frac{dU}{dx}.$$

Окончательно уравнения пограничного слоя для осесимметричного изотермического течения несжимаемой вязкой

жидкости при отсутствии объемных сил примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{R} \frac{dR}{dx} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{v^2}{R} \frac{dR}{dx} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{uv}{R} \frac{dR}{dx} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Первое из этих уравнений представляет собой уравнение неразрывности, второе — уравнение импульсов в меридиональном направлении, последнее — уравнение импульсов в окружном направлении. Обозначение компонент скорости ясно из рис. 97.

Граничными условиями задачи будут:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } z=0 \quad u = w = 0, \quad v = v_0 = R\omega; \\ \text{при } z=\infty \quad u = U(x), \quad v = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Непосредственное решение системы дифференциальных уравнений (8.1) с указанными граничными условиями весьма затруднительно, поэтому применим интегральные методы решения задачи¹⁾. Для этого нужно проинтегрировать уравнения импульсов вдоль толщины пограничного слоя от $z=0$ до $z=h$, где h больше, чем толщина слоя δ . Тогда аналогично тому, как это получается для плоского или осесимметричного потоков, получим с учетом уравнения неразрывности следующие интегральные соотношения импульсов:

1) Для меридионального направления

$$U^2 \frac{d\delta_x^{**}}{dx} + U \frac{dU}{dx} (2\delta_x^{**} + \delta_x^*) + \frac{1}{R} \frac{dR}{dx} (U^2 \delta_x^{**} + v_0^2 \delta_y^{**}) = \frac{\tau_{x0}}{\rho}. \quad (8.3)$$

Здесь, как обычно, обозначены: толщина вытеснения

$$\delta_x^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dz \quad (8.4)$$

¹⁾ Schlichting H., Die laminare Strömung um einer angeströmten rotierenden Drehkörper, Ingenieur Archiv, № 4, 1953.

и толщины потери импульсов

$$\delta_{xy}^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dz, \quad (8.5)$$

$$\delta_{xy}^{**} = \int_0^{\delta} \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 dz, \quad (8.6)$$

а τ_{x0} — составляющая напряжения трения в направлении оси x :

$$\tau_{x0} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0. \quad (8.7)$$

2) Аналогично для окружного направления будем иметь

$$\omega \frac{d}{dx} (UR^3 \delta_{xy}^{**}) = -R^2 \frac{\tau_{y0}}{\rho}, \quad (8.8)$$

где

$$\delta_{xy}^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \frac{v}{v_0} dz, \quad (8.9)$$

а составляющая напряжения трения τ_{y0} равна

$$\tau_{y0} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0. \quad (8.10)$$

§ 48. Выбор распределения скоростей¹⁾

Выберем профили скоростей в пограничном слое так, чтобы удовлетворялись наиболее важные граничные условия. Выбираем их в виде полиномов от параметров

$$t = \frac{z}{\delta_x}, \quad t' = \frac{z}{\delta_y} \quad (8.11)$$

¹⁾ В § 48—52 излагаются результаты цитированной выше работы Шлихтинга, в которой применен метод Польгаузена и Хольштейна — Боленга.

так, чтобы были удовлетворены следующие условия, вытекающие из граничных условий (8.2) и уравнений (8.1):

$$\left. \begin{aligned} \text{при } t=0 \quad u=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -U \frac{dU}{dx} - \frac{v_0^2}{R} \frac{dR}{dx}; \\ \text{при } t=1 \quad u=U, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{при } t'=0 \quad v=v_0=R\omega, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0; \\ \text{при } t'=1 \quad v=0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

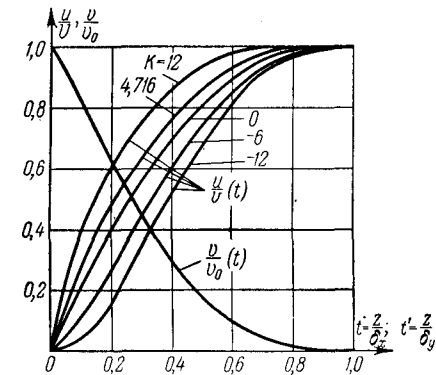


Рис. 98. Профили меридиональных и окружных скоростей [по формулам (8.14) и (8.15)].

В соответствии с этими условиями получают следующие полиномиальные представления:

$$\frac{u}{U} = 2t - 2t^3 + t^4 + K \cdot \frac{1}{6} (t - 3t^2 + 3t^3 - t^4), \quad (8.14)$$

$$\frac{v}{v_0} = 1 - 2t' + 2t'^3 - t'^4, \quad (8.15)$$

где формпараметр

$$K = \frac{\delta_x^2}{\nu} \left[\frac{dU}{dx} + \left(\frac{v_0}{U}\right)^2 \frac{U}{R} \frac{dR}{dx} \right] \quad (8.16)$$

является аналогом формпараметра Польгаузена $\lambda = \frac{\delta^2 U'}{\nu}$ (и переходит в него при $R = \infty$). Распределения скоростей (8.14) и (8.15) представлены на рис. 98.

Условие отрыва $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$ дает значение

$$K = -12 \quad (8.17)$$

такое же, как для плоского и осесимметричного случаев. Вообще, для составляющей u получается то же выражение, что и для плоского и осесимметричного случаев. Поэтому обеспечено, что в случае отсутствия вращения ($v=0$) получим решения Томотика и Шолкемейера¹⁾ для осесимметричного невращающегося тела.

§ 49. Преобразование уравнений импульсов

Согласно (8.10) с учетом (8.15) составляющая напряжения трения в окружном направлении равна

$$\frac{\tau_{y0}}{\rho} = \nu \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 = -2 \frac{\nu}{\delta_y} R \omega \quad (8.18)$$

и уравнению (8.8) можно придать вид:

$$\frac{d}{dx} (R^3 U \delta_{xy}^{**}) = 2 \frac{\nu}{\delta_y} R^3. \quad (8.19)$$

Введением величин

$$g_0 = \frac{\delta_{xy}^{**}}{\delta_y}, \quad \Delta = \frac{\delta_y}{\delta_x}, \quad (8.20)$$

$$\theta = \frac{(\delta_{xy}^{**})^2}{\nu}, \quad (8.21)$$

$$\sigma = \left(\frac{dU}{dx} + 3 \frac{U}{R} \frac{dR}{dx}\right) \theta \quad (8.22)$$

получим из (8.19) следующее дифференциальное уравнение для $\theta(x)$:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{G(K, \Delta)}{U}, \quad (8.23)$$

где

$$G(K, \Delta) = 4g_0 - 2\sigma \quad (8.24)$$

— универсальная функция обоих параметров K и Δ .

¹⁾ Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, ИЛ, 1956.

Для $g_0(K, \Delta)$ можно получить следующее выражение:

$$g_0(K, \Delta) = g_1(\Delta) + K g_2(\Delta). \quad (8.25)$$

Функции $g_1(\Delta)$ и $g_2(\Delta)$ имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \Delta \leq 1 \quad g_1(\Delta) &= \frac{2}{15} \Delta - \frac{3}{140} \Delta^3 + \frac{1}{180} \Delta^4, \\ g_2(\Delta) &= \frac{1}{90} \Delta - \frac{1}{84} \Delta^2 + \frac{3}{560} \Delta^3 - \frac{1}{1080} \Delta^4; \\ \text{при } \Delta \geq 1 \quad g_1(\Delta) &= \frac{3}{10} - \frac{3}{10} \frac{1}{\Delta} + \frac{2}{15} \frac{1}{\Delta^2} - \frac{3}{140} \frac{1}{\Delta^4} + \\ &\quad + \frac{1}{180} \frac{1}{\Delta^5}, \\ g_2(\Delta) &= \frac{1}{120} \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{180} \frac{1}{\Delta^2} + \\ &\quad + \frac{1}{840} \frac{1}{\Delta^4} - \frac{1}{3024} \frac{1}{\Delta^5}. \end{aligned} \right\} (8.26)$$

Значения g_1 и g_2 даны в таблице 13, а величины g_0 изображены на рис. 99.

Таблица 13

Значения функций g_1 и g_2 , вычисленных по формулам (8.26)

Δ	g_1	g_2
0	0	0
0,2	0,0265	0,179
0,4	0,0521	0,286
0,6	0,0761	0,342
0,7	0,0873	0,356
0,8	0,0980	0,363
0,9	0,1080	0,365
1,0	0,1175	0,364
1,2	0,1345	0,353
1,4	0,1492	0,337
1,6	0,1618	0,319
1,8	0,1727	0,301
2,0	0,1822	0,284
2,5	0,2008	0,247
3,0	0,2146	0,217

Для меридионального направления, если обозначить

$$Z = \frac{(\delta_x^{**})^2}{\nu}, \quad \kappa = Z \frac{dU}{dx}, \quad (8.27)$$

получим из (8.3) дифференциальное уравнение относительно $Z(x)$:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{F(K, \Delta)}{U}, \quad (8.28)$$

где

$$F(K, \Delta) = 2 \left\{ f_3 - (2\kappa + \kappa f_2) - Z \frac{U}{R} \frac{dR}{dx} \left[1 + \left(\frac{v_0}{U} \right)^2 \frac{h_0}{f_0} \Delta \right] \right\} \quad (8.29)$$

— универсальная функция K и Δ .

При этом¹⁾

$$\left. \begin{aligned} f_0(K) &= \frac{\delta_x^{**}}{\delta_x} = \frac{37}{315} - \frac{K}{945} - \frac{K^2}{9072}, \\ f_1(K) &= \frac{\delta_x^*}{\delta_x} = \frac{3}{10} - \frac{K}{120}, \\ f_2(K) &= \frac{\delta_x^*}{\delta_x^{**}} = \frac{f_1(K)}{f_0(K)}, \\ f_3(K) &= \frac{\tau_{x0} \delta_x^{**}}{\mu U} = \left(2 + \frac{K}{6} \right) f_0(K), \\ h_0 &= \frac{\delta_y}{\delta_x} = \frac{23}{126}. \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

Связь между Z и K , согласно (8.16), (8.27) и (8.30), имеет вид:

$$Z \left[\frac{dU}{dx} + \left(\frac{v_0}{U} \right)^2 \frac{U}{R} \frac{dR}{dx} \right] = K f_0^2(K), \quad (8.31)$$

так что

$$\kappa^* = \kappa \left[1 + \left(\frac{v_0}{U} \right)^2 \frac{U}{R} \frac{R'}{U'} \right] = K \left(\frac{37}{315} - \frac{K}{945} - \frac{K^2}{9072} \right)^2. \quad (8.32)$$

Универсальные функции f_0 , f_2 , f_3 и K в зависимости от κ^* представлены на рис. 100. Точка отрыва ($K = -12$)

¹⁾ Эти функции известны из расчетов плоского пограничного слоя (см. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, ИЛ, М., 1956, стр. 218).

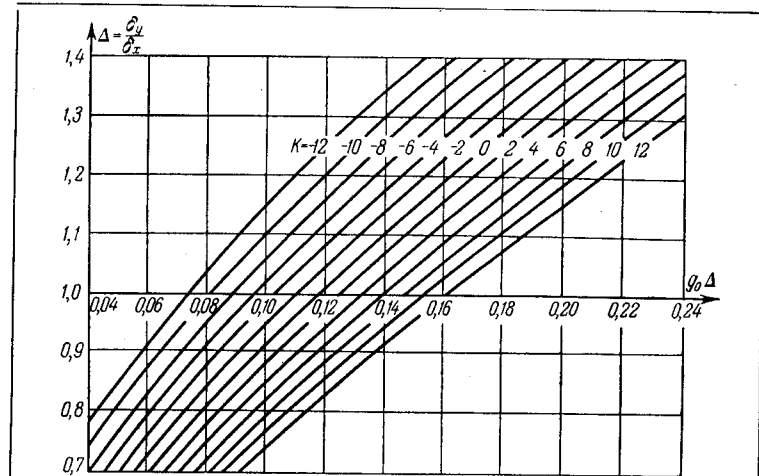


Рис. 99. Значения функций $g_0\Delta$ (по Шлихтингу).

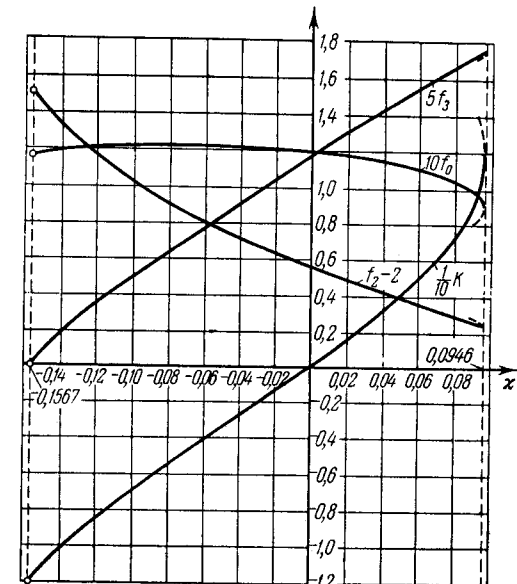


Рис. 100. Универсальные функции f_0 , f_2 , f_3 и K в зависимости от κ^* (по Шлихтингу).

соответствует значению $x^* = -0,1567$. В точке разветвления потока без вращения $K = 4,716$, что соответствует $x^* = 0,05708$.

В дальнейшем для расчетов необходимо знать связь между Δ , g_0 , θ , Z и K . В соответствии с формулами, определяющими эти параметры, эта связь имеет вид:

$$\Delta g_0(K, \Delta) = \sqrt{\frac{\theta}{Z}} f_0(K). \quad (8.33)$$

Итак, имеем два дифференциальных уравнения (8.23) и (8.28), связанных через универсальные функции G и F .

§ 50. Начальные значения в точке разветвления потока

В точке разветвления потока ($U = 0$) оба уравнения (8.23) и (8.28) имеют особенность. Для того чтобы правые части этих уравнений имели конечное значение, необходимо, чтобы G и F в этой точке были равны нулю.

Для потенциального потока при $x \rightarrow 0$

$$U(x) = U'_0 R = aR, \quad \frac{dR}{dx} = 1. \quad (8.34)$$

Поэтому начальное значение для меридионального направления находится из $F = 0$ по (8.29) в виде

$$f_{30} - (2x_0 + x_0 f_{20}) - x_0 \left[1 + \frac{h_0}{f_{00}} \Delta_0 \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 \right] = 0.$$

Совместно с $K_0 f_{00}^2 = x_0 \left[1 + \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 \right]$ по (8.31), h_0 и $f_{30} = f_{00} \left(2 + \frac{K_0}{6} \right)$ по (8.30) после преобразований получим:

$$\frac{K_0}{1 + \left(\frac{\omega}{a} \right)^2} = \frac{2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{23}{126} \Delta_0 \right) K_0}{\frac{137}{210} - \frac{29}{2520} K_0 - \frac{1}{3024} K_0^2 - \frac{23}{126} \Delta_0}. \quad (8.35)$$

При отсутствии вращения имеем:

$$2 - \frac{51}{105} K_0 + \frac{29}{2520} K_0^2 + \frac{1}{3024} K_0^3 = 0 \quad (8.36)$$

с решением

$$(K_0)_{\omega=0} = K_{00} = 4,716,$$

известным из решения Томотика.

Для окружного направления из $G = 0$ следует:

$$2g_0(K_0, \Delta_0) = \sigma(K_0, \Delta_0),$$

а так как $\sigma(K_0, \Delta_0) = 4a\theta_0 = 4ag_{00}^2 \Delta_0^2 \frac{\delta_{\omega 0}^2}{\nu}$ по (8.20) — (8.22)

и $K_0 = \frac{a\delta_{\omega 0}^2}{\nu} \left[1 + \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 \right]$ по (8.16), то в соответствии с (8.25) найдем:

$$\frac{K_0}{1 + \left(\frac{\omega}{a} \right)^2} = \frac{1}{2 [g_1(\Delta_0) + K_0 g_2(\Delta_0)] \Delta_0^2}. \quad (8.37)$$

Таким образом получаем два уравнения связи (8.35) и (8.37) между K_0 и Δ_0 для заданного ω/a .

При отсутствии вращения ($\omega = 0$) получается $\Delta_{00} = 0,915$. То, что $\delta_y \approx \delta_x$, является физически оправданным. Совместное решение уравнений (8.35) и (8.37) показывает, что при $\omega/a > 0,815$ нет приемлемых решений.

Результат совместного решения этих уравнений представлен в таблице 14 и на рис. 101. Как видно, начиная с $K = 12$, рассматриваемый расчетный метод непригоден.

Таблица 14

Значения характерных величин пограничного слоя в точке разветвления потока, обтекающего вращающееся осесимметричное тело (по Шлихтингу)

$\frac{\omega}{a}$	K_0	Δ_0	$100x_0$	$100x_0^*$	$\frac{1}{2} \xi_{00}$
0	4,716	0,915	5,71	5,71	0,0629
0,221	5	0,908	5,71	5,99	0,0632
0,454	6	0,882	5,70	6,89	0,0640

Начальное значение для Z_0 получается из условия $U'_0 = a$, согласно второму уравнению (8.27), в виде:

$$Z_0 = \frac{x_0}{a}. \quad (8.38a)$$

Для θ начальное значение ввиду равенств $\sigma_0 = 2g_{00}$ и (8.34), согласно (8.22), получится равным

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \frac{g_{00}}{a}. \quad (8.386)$$

Примененный здесь способ задания распределения скоростей [параболы 4-й степени для u и v , формулы (8.14) и

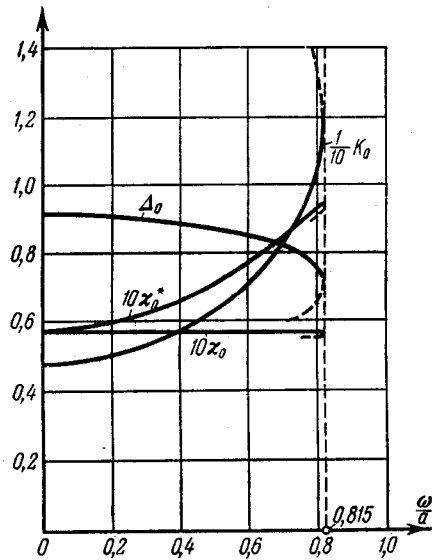


Рис. 101. Начальные значения формпараметров (по Шлихтингу).

(8.15)] отличается от способа, примененного ранее Шлихтингом и Труккенбродтом¹⁾ для расчета пограничного слоя на обдуваемом диске. Однако следует ожидать, что значения параметров пограничного слоя для обдуваемого диска будут приблизительно совпадать со значениями, полученными излагаемым в настоящей главе способом в точке разветвления потока на вращающемся осесимметричном теле.

Согласно уравнению (8.38a) и (8.27) будем иметь:

$$\delta_{x0}^{**} \sqrt{\frac{a}{v}} = \sqrt{x_0}.$$

¹⁾ См. сноску 1) на стр. 33.

Для меридиональной составляющей напряжения трения на стенке в точке разветвления потока $(\tau_{x0})_{x=0} = \tau_{r0}$, согласно четвертому соотношению (8.30), получим:

$$\frac{\tau_{r0}}{\rho U^2} \sqrt{\frac{UR}{v}} = \sqrt{\frac{f_0(K_0)}{a \delta_{x0}^{**}}} \left[2 + \frac{1}{6} K_0 \right].$$

На рис. 102 приведены подсчитанные по этим формулам значения δ_{x0}^{**} и τ_{r0} . Как видно, они хорошо согласуются

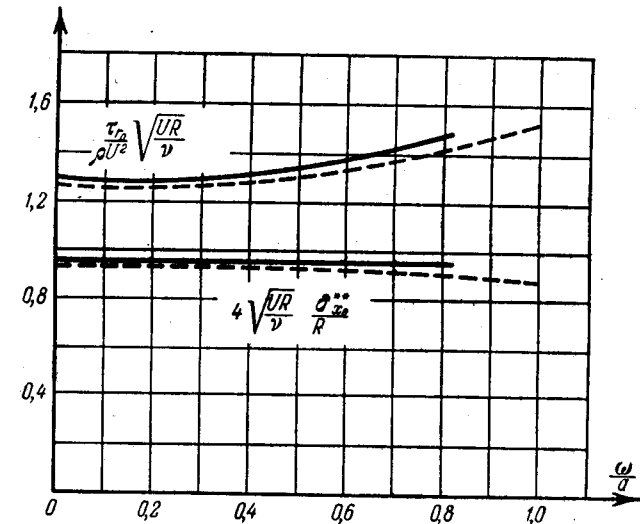


Рис. 102. Значения δ_{x0}^{**} и τ_{r0} для обдуваемого вращающегося диска. Пунктирные линии — по результатам непосредственного расчета для обдуваемого диска; сплошные линии — по приближенному расчету для точки разветвления потока (по Шлихтингу).

с данными непосредственного расчета для обдуваемого диска до $\omega/a = 0,815$. Это позволяет считать излагаемый расчетный метод справедливым для всех значений ω/a в интервале $0 \leq \frac{\omega}{a} < 0,815$.

§ 51. Момент вращения и коэффициент сопротивления

Момент вращения определяется интегрированием окружной составляющей напряжения трения от точки разветвления потока до точки отрыва $x_A \leq x_k$, где x_k — абсцисса конечной точки тела:

$$M = -2\pi \int_0^{x_A} \tau_{y0} R^2 dx. \quad (8.39)$$

На основании уравнения (8.8) это дает

$$M = 2\pi \rho \omega R_A^3 U_A \delta_{xyA}^{**}, \quad (8.40)$$

где индекс A относится к значениям в точке отрыва. Введем безразмерное значение δ_{xyA}^{**} :

$$\frac{\delta_{xyA}^{**}}{R_m} \sqrt{\frac{U_\infty R_m}{\nu}} = B, \quad (8.41)$$

где R_m — радиус наибольшего поперечного сечения тела вращения. Тогда для коэффициента момента трения c_M , определяемого формулой

$$c_M = \frac{M}{\frac{\rho}{2} \omega^2 R_m^5}, \quad (8.42)$$

получим соотношение

$$\frac{V_m}{U_\infty} \sqrt{\frac{U_\infty R_m}{\nu}} c_M = 4\pi B \left(\frac{R_A}{R_m}\right)^3 \frac{U_A}{U_\infty}, \quad (8.43)$$

где $V_m = \omega R_m$.

Для вращающегося обдуваемого диска радиуса $R_m = R$ получим отсюда, исходя из того, что $R_A = R$, $U_A = aR$:

$$\sqrt{\frac{R^2 \omega}{\nu}} c_M = 4\pi \delta_{xy}^{**} \sqrt{\frac{a}{\nu}} \sqrt{\frac{a}{\omega}}.$$

Тогда для точки разветвления потока, согласно (8.38б), взяв наименьшее численное значение

$$\sqrt{\frac{a}{\nu}} \delta_{xy}^{**} = \left(\sqrt{\frac{g_{00}}{2}}\right)_{\frac{\omega}{a}=0} = 0,251,$$

находим:

$$\sqrt{\frac{R^2 \omega}{\nu}} c_M = 3,15 \sqrt{\frac{a}{\omega}},$$

что очень близко к результату непосредственного расчета для диска¹⁾, в котором численный коэффициент равен 3,17. Проинтегрировав τ_{x0} вдоль поверхности, получаем полное сопротивление трения набегающему потоку:

$$W_f = 2\pi \int_0^{x_A^*} \tau_{x0} R dx^*, \quad (8.44)$$

где x^* обозначает координату, отмеряемую вдоль оси тела. Коэффициент сопротивления

$$c_W = \frac{W_f}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2 \pi R_m^2} \quad (8.45)$$

определится из формулы

$$\sqrt{\frac{U_\infty R_m}{\nu}} c_W = 4 \int_0^{\frac{x_A^*}{R_m}} T_f \frac{R}{R_m} d\left(\frac{x^*}{R_m}\right), \quad (8.46)$$

где

$$T_f = \frac{\tau_{x0}}{\rho U_\infty^2} \sqrt{\frac{U_\infty R_m}{\nu}}. \quad (8.47)$$

§ 52. Примеры расчетов. Сравнение с опытами

1. Шар. Для шара R_m есть его радиус, $x/R_m = \vartheta$ — центральный угол, отсчитываемый от точки разветвления потока. Тогда

$$\left. \begin{aligned} R(x) &= R_m \sin \vartheta, \\ U(x) &= \frac{3}{2} U_\infty \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (8.48)$$

Градиент скорости в точке разветвления потока равен

$$a = \left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=0} = \frac{3}{2} \frac{U_\infty}{R_m},$$

¹⁾ См. сноску 1) на стр. 33.

к большим числам R (кризис сопротивления), связанное с переходом к турбулентному режиму. Влияние вращения сказывается в том, что, начиная с $V_m/U_\infty = 1,4$, критические числа R уменьшаются с увеличением V_m/U_∞ , т. е. центробежные силы действуют как турбулизирующий фактор. Однако в области значений V_m/U_∞ от 0 до 1,4, когда отрыв еще ламинарный, критические числа R увеличиваются.

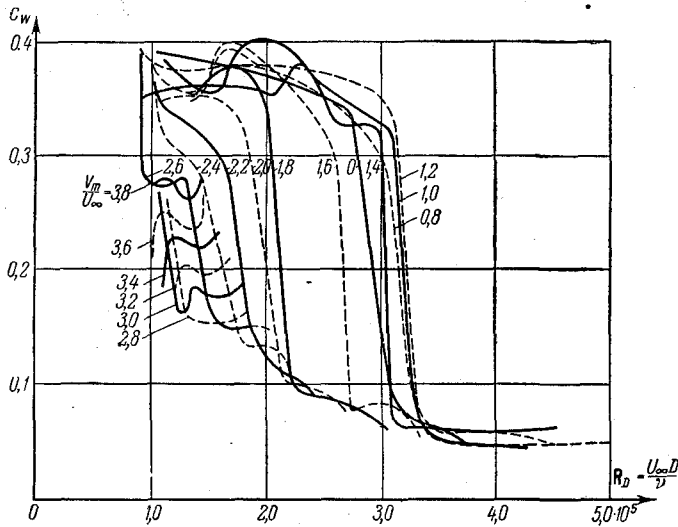


Рис. 105. Коэффициент сопротивления вращающегося шара (по Лутандеру и Ридбергу).

Заметим далее, что опыты подтверждают полученное расчетом для малых V_m/U_∞ смещение к экватору точки отрыва под действием вращения, пока не появляется обусловленный вращением преждевременный переход к турбулентному течению. Расчет, однако, дает приближение отрыва к экватору со стороны $\vartheta_A > 90^\circ$, а опыт — со стороны $\vartheta_A < 90^\circ$.

Полутело вращения. Рассмотрим случай обтекания полутела, образованного наложением однородного потока на поток от пространственного точечного источника. Если обозначить через R_m наибольший радиус тела в бесконеч-

ности, полутело можно параметрически представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R}{R_m} &= \sin \frac{\vartheta}{2}, \\ \frac{x}{R_m} &= \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} + \\ &+ \int_0^{\frac{\vartheta}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha}} - \int_0^{\frac{\vartheta}{2}} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha} d\alpha, \end{aligned} \right\} (8.49)$$

а распределение скоростей примет вид:

$$\frac{U}{U_\infty} = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}. \quad (8.50)$$

На рис. 106 представлены значения U/U_∞ и формпараметра K . Все значения K при $V_m/U_\infty > 1,3$ положительны.

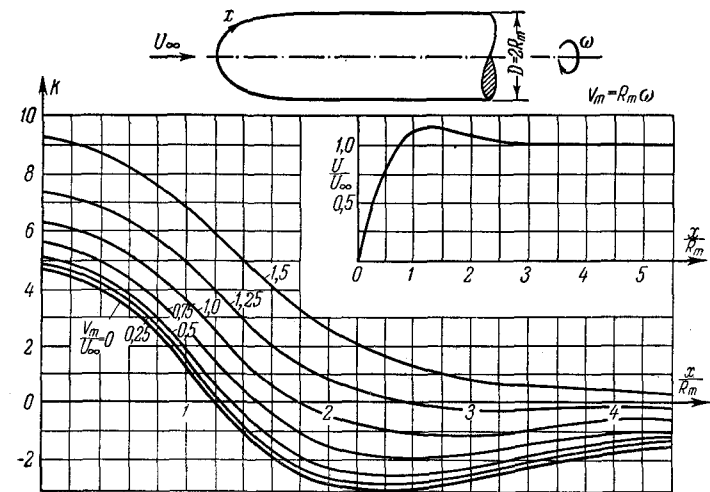


Рис. 106. Распределение меридиональных скоростей вне пограничного слоя для полутела вращения и значения формпараметра K (по Шлихтингу).

т. е. вращение приводит к увеличению устойчивости ламинарного пограничного слоя. Это объясняется тем, что центробежные силы увеличиваются в направлении движения и

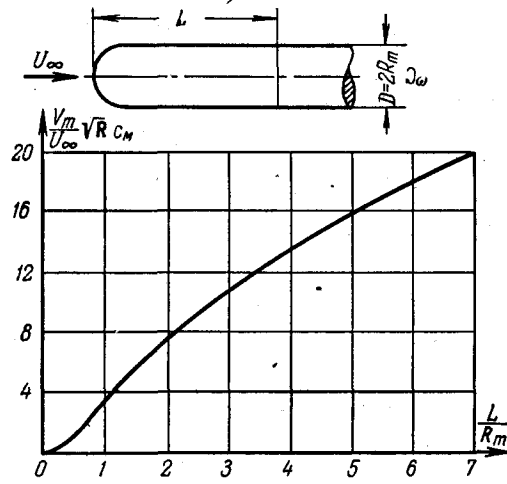


Рис. 107. Коэффициент момента трения при вращении полутела вращения (по Шлихтингу).

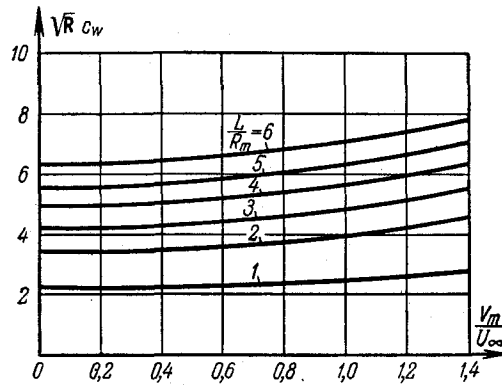


Рис. 108. Коэффициент сопротивления вращающегося полутела вращения (по Шлихтингу).

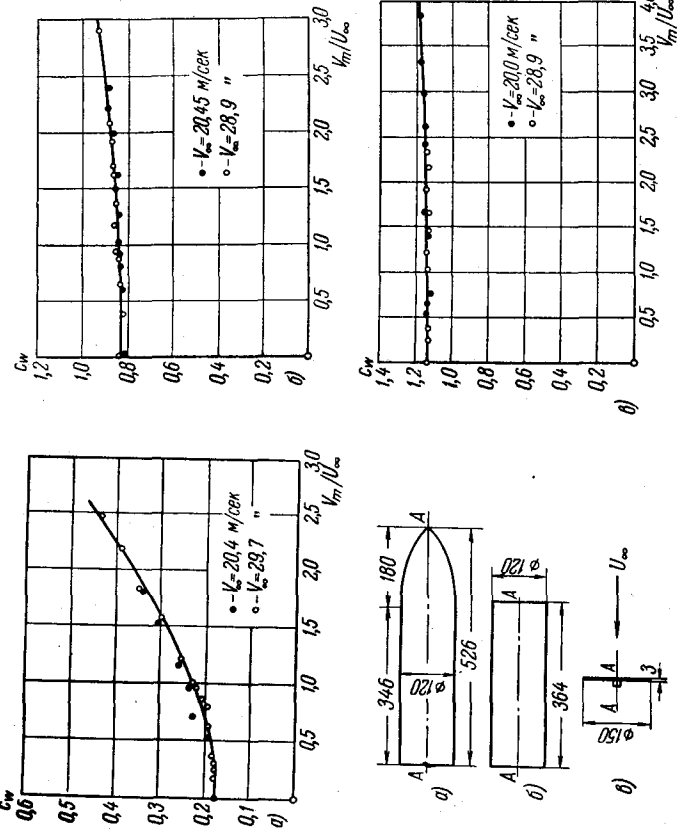


Рис. 109. Влияние вращения на сопротивление осевому потоку (по опытным данным Визельсберга).

действуют как дополнительное падение давления в этом направлении. На рис. 107 представлены значения коэффициента момента трения в зависимости от относительной длины L/R_m полутела. На рис. 108 представлены значения коэффициентов c_W сопротивления осевому потоку в зависимости от V_m/U_∞ и L/R_m . Заметим, что c_W возрастает в зависимости

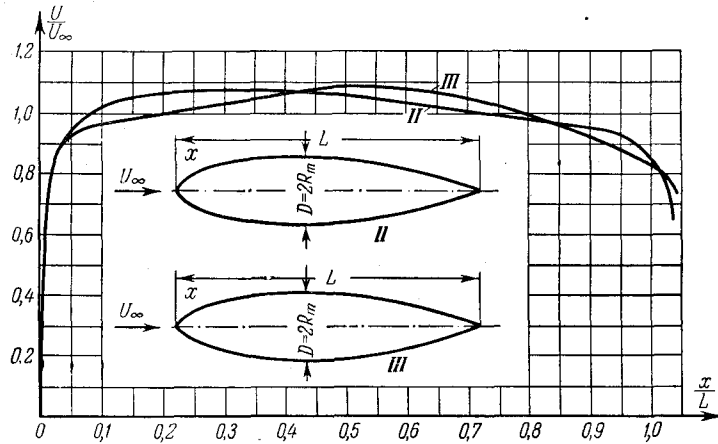


Рис. 110. Распределение меридиональных скоростей вне пограничного слоя для тел вращения обтекаемой формы.

от V_m/U_∞ примерно по квадратичному закону. Это соответствует опытным данным. На рис. 109 представлены данные Визельсбергера¹⁾ для различных обдуваемых в осевом направлении вращающихся тел. Наиболее значительное влияние оказывает параметр V_m/U_∞ для тела с обтекаемой лобовой частью, притом зависимость от этого параметра близка к квадратичной. Наименьшее влияние оказывает вращение на коэффициент сопротивления в случае обдува диска.

Тела вращения обтекаемой формы. Два других примера представлены для профилированных тел вращения обтекаемой формы с относительной толщиной $D/L = 0,2$.

¹⁾ Wieselsberger C., Über den Luftwiderstand bei gleichzeitiger Rotation des Versuchskörpers, Phys. Z., т. 28, 1927, стр. 84.

Форма тел и распределение скоростей внешнего потока взяты из работы Юнгов¹⁾ (рис. 110).

Тело вращения II имеет меридиональное сечение нормального профиля, а тело III — ламинаризированного профиля с оттянутой к выходу максимальной толщиной и соответственно максимальной скоростью. Значения c_M и c_W даны

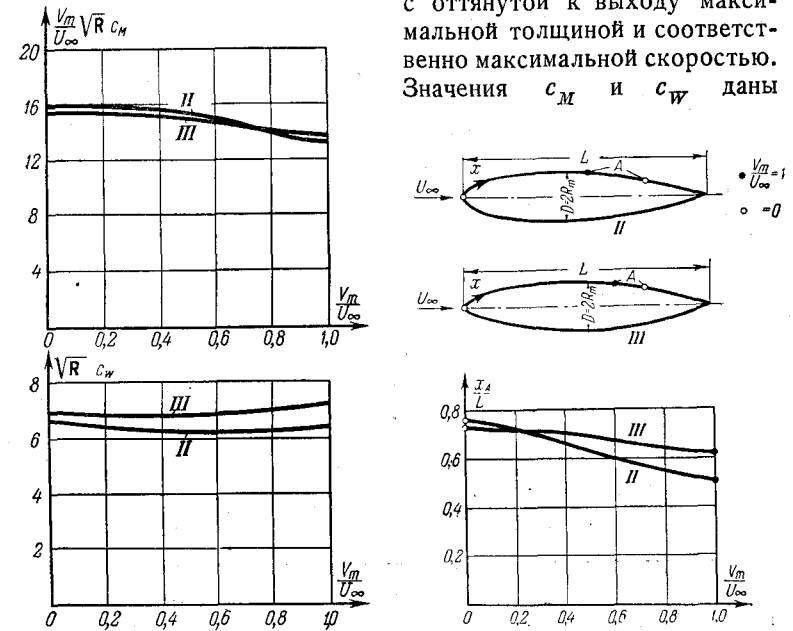


Рис. 111. Коэффициент момента и коэффициент сопротивления для обтекаемых тел вращения (по Шлихтингу).

Рис. 112. Положение точки отрыва при вращении для осесимметричных тел обтекаемой формы (по Шлихтингу).

на рис. 111. При этом c_W учитывает лишь сопротивление трения до точки отрыва и не учитывает потери отрыва. На рис. 112 представлено положение точки отрыва в зависимости от V_m/U_∞ . Так же как и для случая вращающегося шара, точка отрыва с увеличением скорости вращения перемещается к точке наибольшей толщины тела. Для тела II это перемещение больше, чем для тела III с ламинированным контуром.

¹⁾ Young A. D., Young E, A family of streamline bodies of revolution suitable for high-speed and low-drag requirements, ARC Report № 2204, 1951.

На рис. 113 представлены также профили меридиональных скоростей U/U_∞ в пограничном слое для тела II в десяти точках.

Используя полученные выше решения для динамического пограничного слоя, Ямага¹⁾ провел приближенный расчет

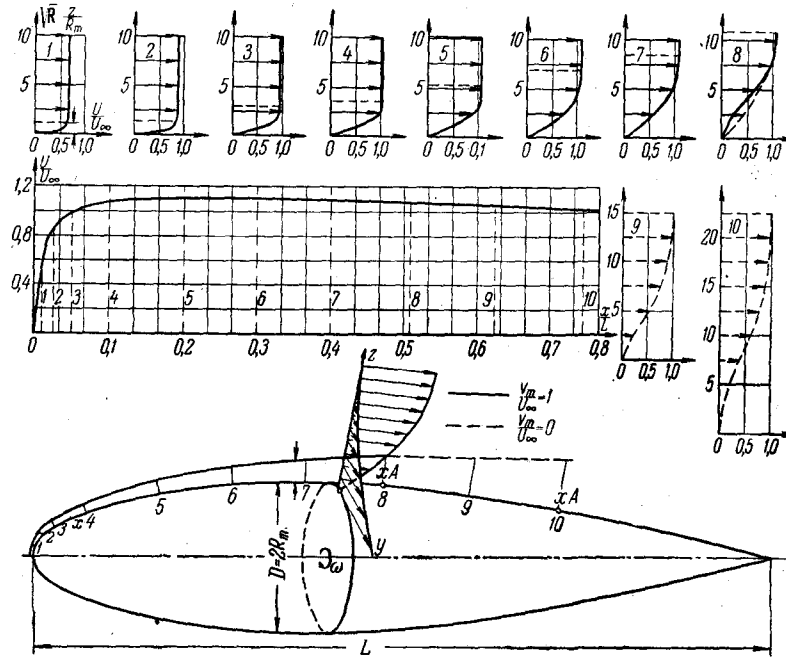


Рис. 113. Профили меридиональных скоростей в пограничном слое вращающегося осесимметричного тела II обтекаемой формы (по Шлихтингу).

теплоотдачи поверхности осесимметричного тела, вращающегося в однородном потоке несжимаемой жидкости. Для этого он выводит соответствующее интегральное соотношение для теплового пограничного слоя (подобное выведенному в § 25 для диска). Далее он решает задачу способом Динемана²⁾.

¹⁾ Y a m a g a J o j i, An approximate solution of the laminar flow heat — transfer on a rotating axially symmetrical body surface in a uniform incompressible flow, J. Mech. Lab. Japan, т. 2, № 1, 1956.

²⁾ D i e n e m a n n, Berechnung der Wärmeüberganges am laminar angeströmter Körpern mit konstanter und ortsveränderlicher Wandtemperatur, ZAMM, № 3, 1953.

§ 53. Вращение шара в неограниченной неподвижной среде

Как уже указывалось, развитая выше теория неприменима к случаю, когда $\omega/a > 0,815$, т. е. к случаю вращения тел в неподвижной среде. Поэтому представляет интерес рассмотреть приближенное решение Хоурта¹⁾ для вращающегося в неподвижной среде шара. С учетом того, что в случае шара радиуса R_m

$$R(x) = R_m \sin \vartheta, \quad \frac{dR}{dx} = \cos \vartheta, \quad x = R_m \vartheta,$$

система уравнений (8.1) для неподвижной среды ($\frac{dU}{dx} = 0$) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_m} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{R_m} \operatorname{ctg} \vartheta &= 0, \\ \frac{u}{R_m} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{R_m} \operatorname{ctg} \vartheta &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{u}{R_m} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{R_m} \operatorname{ctg} \vartheta &= \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.51)$$

Заметим, что в случае шара величина z для данной точки есть разность между расстоянием r данной точки от центра шара и радиусом шара: $z = r - R_m$.

Для определения решения вблизи полюса ($\vartheta = 0$) применим разложение в ряд по степеням ϑ , введя аналогично диску новую переменную

$$\zeta = z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}.$$

Таким образом, будем иметь ряды:

$$\left. \begin{aligned} u &= R_m \omega [\vartheta F_1 + \vartheta^3 F_3 + \dots], \\ v &= R_m \omega [\vartheta G_1 + \vartheta^3 G_3 + \dots], \\ w &= (\nu \omega)^{\frac{1}{2}} [H_1 + \vartheta^2 H_3 + \dots]. \end{aligned} \right\} \quad (8.52)$$

¹⁾ Howarth L., Note on the boundary layer on a rotating sphere Philos. Magazine, т. 42, № 334, 1951.

Подставляя (8.52) в (8.51) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ϑ , получим для первых шести функций следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} F_1'' + F_1' H_1 - G_1^2 &= F_1'', \\ 2F_1 G_1 + H_1 G_1' &= G_1'', \\ 2F_1 + H_1' &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (8.53)$$

$$\left. \begin{aligned} 4F_1 F_3 + F_1' H_3 + F_3' H_1 + \frac{1}{3} G_1^2 - 2G_1 G_3 &= F_3'', \\ 2F_3 G_1 + 4F_1 G_3 + H_3 G_1' + H_1 G_3' - \frac{1}{3} F_1 G_1 &= G_3'', \\ 4F_3 + H_3' - \frac{1}{3} F_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.54)$$

где штрихи обозначают дифференцирование по переменной ζ .

Граничными условиями задачи, как нетрудно проверить, будут:

$$\left. \begin{aligned} F_1 = F_3 = 0, \quad G_1 = 1, \quad G_3 = -\frac{1}{6}, \\ H_1 = 0, \quad H_3 = 0 \quad \text{при } \zeta = 0; \\ G_1 = G_3 = F_1 = F_3 = 0 \quad \text{при } \zeta = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (8.55)$$

Как видно, уравнения (8.53) есть уравнения Кармана (2.7) для вращающегося диска. Поэтому можно воспользоваться для них решением Кокрэна (§ 4), а затем, подставив их в (8.54), найти функции F_3 , G_3 , H_3 .

Однако ввиду сложности системы (8.54), а также ввиду того, что ее решение дает результат лишь для узкой области у полюсов, имеет смысл попытаться разыскать приближенное решение, справедливое для всех значений ϑ от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

С этой целью применим интегральный метод Кармана¹⁾. Проинтегрируем второе уравнение системы (8.51) вдоль толщины пограничного слоя с учетом первого уравнения и граничных условий; тогда получим:

$$\frac{d}{d\vartheta} \int_0^{\delta} u^2 dz + \int_0^{\delta} (u^2 - v^2) \operatorname{ctg} \vartheta dz = -\nu R_m \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_0. \quad (8.56)$$

¹⁾ См. сноску на стр. 15.

Аналогично из последнего уравнения (8.51) найдем:

$$\frac{d}{d\vartheta} \int_0^{\delta} uv dz + 2 \int_0^{\delta} uv \operatorname{ctg} \vartheta dz = -\nu R_m \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_0. \quad (8.57)$$

Заметим, что эти интегральные соотношения можно также получить методом, примененным в § 15.

Если следовать методу Кармана для вращающегося диска¹⁾, то нужно представить составляющие скорости в виде

$$\left. \begin{aligned} u &= A \left(\xi - 3\xi^3 + 2\xi^4 \right) - \frac{\delta^2 \omega^2 R_m}{\nu} \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{1}{2} \xi^2 - \xi^3 + \frac{1}{2} \xi^4 \right), \\ v &= \omega R_m \sin \vartheta \left(1 - \frac{3}{2} \xi + \frac{1}{2} \xi^3 \right), \\ \xi &= \frac{z}{\delta}. \end{aligned} \right\} \quad (8.58)$$

Они удовлетворяют граничным условиям:

$$\begin{aligned} \text{при } \xi = 0 \quad u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} &= -\frac{\omega^2 \delta^2 R_m}{\nu} \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ v &= \omega R_m \sin \vartheta, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = 0; \\ \text{при } \xi = 1 \quad u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} &= 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0. \end{aligned}$$

Написанные здесь граничные условия для второй производной следуют непосредственно из уравнений (8.51). Значение A есть $\delta \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0$. Величины A и δ — неизвестные, которые нужно определить из интегральных соотношений (8.56) и (8.57).

Если, далее, обозначить

$$A = \frac{\chi \omega^2 \delta^2 R_m}{\nu} \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad \delta = \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \lambda, \quad (8.59)$$

то задача сведется к определению новых неизвестных χ и λ . В случае вращающегося диска (§ 16) ясно, что

$$\int_0^{\delta} v^2 dz \gg \int_0^{\delta} u^2 dz,$$

¹⁾ См. сноску на стр. 15.

следовательно, можно пренебречь членом $\int_0^\delta u^2 dz$ по сравнению с $\int_0^\delta v^2 dz$. Поэтому попытаемся и для случая шара пренебречь величиной $\int_0^\delta u^2 dz$ в интегральном соотношении (8.56). Из полученного соотношения

$$\int_0^\delta v^2 \operatorname{ctg} \vartheta dz = \nu R_m \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0$$

находим:

$$\chi = \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{2} \xi + \frac{1}{2} \xi^3 \right)^2 d\xi = 0,2357. \quad (8.60)$$

Используя это значение χ , получим из (8.57) уравнение

$$\left(\frac{d}{d\vartheta} + 2 \operatorname{ctg} \vartheta \right) (0,00864 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \lambda^3) = \frac{3}{2\lambda} \sin \vartheta,$$

так что

$$\frac{3}{4} \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{d\lambda^4}{d\vartheta} + (4 \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \lambda^4 = 173,6,$$

или

$$\frac{d}{d\vartheta} \left(\sin^{\frac{16}{3}} \vartheta \cos^{\frac{4}{3}} \vartheta \lambda^4 \right) = 231,5 \sin^{\frac{13}{3}} \vartheta \cos^{\frac{1}{3}} \vartheta, \quad (8.61)$$

откуда получим окончательно для величины λ значения

$$\lambda^4 = \frac{231,5}{\sin^{\frac{16}{3}} \vartheta \cos^{\frac{4}{3}} \vartheta} \int_0^\vartheta \sin^{\frac{13}{3}} \vartheta \cos^{\frac{1}{3}} \vartheta d\vartheta. \quad (8.62)$$

Для малых ϑ это соотношение должно давать результат, близкий к значениям для вращающегося диска. Действительно, при малых ϑ получаем $\lambda^4 = 43,4$ и

$$\lambda = 2,57, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 = 0,61 \frac{\omega^{3/2} R_m \vartheta}{\nu^{1/2}}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 = -0,58 \frac{\omega^{3/2} R_m \vartheta}{\nu^{1/2}},$$

в то время как у Кокрэна, уточнившего решение для диска по методу Кармана¹⁾, соответствующие коэффициенты имеют близкие значения: 2,59; 0,54 и $-0,54$.

Таблица 16

Значения характерных величин для пограничного слоя вращающегося шара (по Л. Хоуарту)

ϑ	λ	$\frac{u_{\max}}{R_m \omega}$	$\frac{v_{\max}}{R_m \omega}$	$\frac{u_{\max}}{v_{\max}}$	$\frac{1}{(\omega \nu)^{1/2}} \int_0^\delta u dz$	$-\frac{w_\delta}{(\omega \nu)^{1/2}}$
0	2,57	0,000	0,000	0,22	0,000	0,62
10	2,58	0,039	0,174	0,22	0,054	0,62
30	2,74	0,110	0,500	0,22	0,164	0,60
50	3,12	0,127	0,766	0,21	0,276	0,56
70	4,06	0,180	0,940	0,19	0,395	0,50
80	5,28	0,161	0,985	0,16	0,459	0,44
90	∞	0	1,000	0,00	0,497	0,00

Значения λ , вычисленные по формуле (8.62), даны в таблице 16. Формулы (8.58) при этом значении $\chi = 0,2357$ получают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u \lambda_0^2}{\lambda^2 R_m \omega \sin \vartheta \cos \vartheta} &= \lambda_0^2 (0,2357 \xi - 0,5 \xi^2 + 0,2929 \xi^3 - 0,0286 \xi^4), \\ \frac{v}{R_m \omega \sin \vartheta} &= 1 - 1,5 \xi + 0,5 \xi^3, \end{aligned} \right\} \quad (8.63)$$

где λ_0 есть значение λ при $\vartheta = 0$ ($\lambda_0 = 2,57$). Соответствующие значения этих величин даны в таблице 17. Как видно, профили скоростей u и v сохраняют свой вид вдоль шара, изменяются лишь масштаб и амплитуда. Максимальное значение первой из величин (8.63) равно 0,22, второй — 1. Изменение максимальных значения u и v (u_{\max} и v_{\max}) представлено в таблице 16; там же дано и их отношение.

Интегрирование первого соотношения (8.63) дает

$$\frac{1}{R_m (\omega \nu)^{1/2}} \int_0^\delta u dz = 0,0184 \lambda^3 \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad (8.64)$$

¹⁾ См. сноску на стр. 16.

а из уравнения неразрывности [первое уравнение (8.51)]

$$\omega_{\delta} = -\frac{1}{R_m} \left[\frac{d}{d\vartheta} \int_0^{\delta} u dz + \operatorname{ctg} \vartheta \int_0^{\delta} u dz \right],$$

где ω_{δ} — значения ω на внешней границе пограничного слоя. Используя (8.64), найдем:

$$\begin{aligned} \omega_{\delta} &= -0,0184 (\omega v)^{1/2} \left[\frac{d}{d\vartheta} (\lambda^3 \sin \vartheta \cos \vartheta) + \lambda^3 \cos^2 \vartheta \right] = \\ &= 0,0184 (\omega v)^{1/2} \left[(2 \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \lambda^3 + \frac{3}{4\lambda} \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{d\lambda^4}{d\vartheta} \right], \end{aligned}$$

и окончательно с учетом (8.61) получим:

$$\omega_{\delta} = -0,0184 (\omega v)^{1/2} \frac{173,6 - 2\lambda^4 \cos^2 \vartheta}{\lambda}. \quad (8.65)$$

Эти значения даны в последнем столбце таблицы 16.

Таблица 17
Распределение скоростей по сечению пограничного слоя вращающегося шара (по Л. Хоурту)

ξ	$\frac{u \lambda_0^2}{\lambda^2 R_m^{\omega} \sin \vartheta \cos \vartheta}$	$\frac{v}{R_m^{\omega} \sin \vartheta}$
0,0	0,0000	1,0000
0,1	0,1246	0,8505
0,2	0,1944	0,7040
0,3	0,2205	0,5635
0,4	0,2133	0,4320
0,6	0,1386	0,2080
0,8	0,0450	0,0056
1,0	0,0000	0,0000

Из формулы (8.62) вытекает, что λ (следовательно, и δ) в окрестности экватора ($\vartheta = \pi/2$) имеет вид $c \cos^{-1/2} \vartheta$, т. е. уже нельзя пренебрегать первым членом (8.56), и поэтому полученное решение неприменимо для этой области. Однако природа особенности решения при $\vartheta = \pi/2$ такова, что решение неприменимо лишь в узкой окрестности экватора, где так

или иначе имеется взаимодействие течений из обоих полушарий. Интегральные же величины являются достоверными.

Из (8.63) следует, что в пограничном слое при $\vartheta \rightarrow \pi/2$ $u \rightarrow 0$, $\frac{v}{R_m^{\omega}} \rightarrow 1$, в то время как $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 \rightarrow 0$, $\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 \rightarrow 0$, т. е. решение вблизи экватора представляет собой нечто подобное отрыву. Заметим, что стремление u к нулю при

$\vartheta \rightarrow \pi/2$ как будто противоречит тому, что $\int_0^{\delta} u dz$ не равен нулю при $\vartheta = \pi/2$. В действительности же из условия симметрии не может быть протока через плоскость экватора,

поэтому $2\pi R \int_0^{\delta} u dz$ при $\vartheta = \pi/2$ есть по сути дела половина количества жидкости, которое отходит от шара вблизи экватора; оно равно притоку жидкости в пограничный слой по поверхности полушария.

§ 54. Вращающийся полубесконечный цилиндр в однородном потоке

Другим примером задачи об осевом обтекании вращающегося осесимметричного тела, который не охватывается решением Шлихтинга (§ 48—51), является обтекание однородным потоком со скоростью в бесконечности U вращающегося полубесконечного полого цилиндра, ось которого ориентирована вдоль потока¹⁾.

Уравнения (8.1) в этом случае примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.66)$$

Первые два уравнения имеют такой же вид, как уравнения движения при плоско-параллельном обтекании плоской

¹⁾ См. приложение к цитированной выше работе Хоурта (сноска на стр. 239).

пластинки. Так как и граничные условия совпадают с граничными условиями для плоской пластинки, то составляющие u и w вектора скорости определяются из решения для пограничного слоя плоской пластинки¹⁾. Величина u/U представляется в виде

$$\frac{u}{U} = \frac{1}{2} \varphi'(\eta), \quad \eta = \frac{1}{2} z \sqrt{\frac{U}{\nu x}}, \quad (8.67)$$

где функция φ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0 \quad (8.68)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi' = 0 & \quad \text{при} \quad \eta = 0, \\ \varphi' = 2 & \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Значения функции u/U протабулированы²⁾. Для составляющей w получается

$$w = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U\nu}{x}} (\eta\varphi' - \varphi). \quad (8.69)$$

Окружная составляющая v определится по известным значениям u и w согласно последнему уравнению (8.66) при граничных условиях:

$$\begin{aligned} v = 0 & \quad \text{при} \quad z = \infty, \\ v = \omega R & \quad \text{при} \quad z = 0. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что решением будет функция

$$v = \frac{1}{2} \omega R (2 - \varphi'). \quad (8.70)$$

Действительно, после подстановки величин (8.67), (8.69) и (8.70) в последнее уравнение (8.66) возвратимся к уравнению (8.68).

Составляющие поверхностного трения будут равны

$$\tau_{zx} = 0,332\rho \left(\frac{\nu U^3}{x}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau_{zy} = -0,332\rho\omega R \left(\frac{\nu U}{x}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8.71)$$

¹⁾ Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, Гостехиздат, 1957.

²⁾ См. там же.

Таким образом, вращение не оказывает влияния на сопротивление цилиндра потоку. Эта тенденция наблюдалась при опытах Визельсбергера для цилиндра конечной длины (см. рис. 109) даже при наличии торца.

Момент, необходимый для поддержания вращения участка цилиндра длины L , равный моменту трения

$$M = \int_0^L 2\pi\tau_{zy}R^2 dx = 1,3282\pi\rho\omega R^3 (\nu LU)^{\frac{1}{2}}.$$

Если теперь определить коэффициент момента по формуле (8.42), то получим выражение

$$\frac{\omega R}{U} \sqrt{\frac{RU}{\nu}} c_M = 2\pi \cdot 1,3282 \sqrt{\frac{L}{R}} = 8,346 \sqrt{\frac{L}{R}}. \quad (8.72)$$

Как и следует ожидать, при больших значениях L/R эта формула дает результат, близкий к случаю обтекания вращающегося полутела, как нетрудно проверить по рис. 107 (стр. 234).

§ 55. Влияние сжимаемости

В случае осевого обтекания вращающегося тела сжимаемым газом уравнения движения в пограничном слое принимают следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho Ru) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho R w) = 0, \quad (8.73)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{v^2}{R} \frac{dR}{dx} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho_{\infty} U \frac{dU}{dx} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (8.74)$$

$$\rho u \frac{\partial (Rv)}{\partial x} + w \frac{\partial (Rv)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial (Rv)}{\partial z} \right]. \quad (8.75)$$

Уравнение энергии можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial i}{\partial x} + w \frac{\partial i}{\partial z} \right) + u\rho_{\infty} U \frac{dU}{dx} = \\ = \frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial i}{\partial z} \right) + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (8.76)$$

К этим уравнениям следует еще присоединить уравнение состояния

$$\frac{k-1}{k} \rho i = p \quad (8.77)$$

и уравнение зависимости вязкости от теплосодержания (температуры)

$$\frac{\mu}{\mu_{\infty}} = \left(\frac{i}{i_{\infty}} \right)^n. \quad (8.78)$$

Во внешнем потоке уравнение энергии имеет вид:

$$h_{\infty} = i_{\infty} + \frac{1}{2} U^2 = \text{const.}$$

В случае, когда число Прандтля равно единице: $Pr = 1$, можно просто найти частное решение¹⁾ системы уравнений (8.73)—(8.78), подобно тому как это было сделано в § 21.

Для этого умножим уравнение (8.75) на $\frac{v + k\omega R^2}{uR}$, сложим с уравнением (8.74) и с уравнением энергии, разделенным на u . Тогда после элементарных преобразований получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(i + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} v^2 + kR\omega v \right) + \\ + \rho \frac{w}{u} \frac{\partial}{\partial z} \left(i + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} v^2 + kR\omega v \right) = \\ = \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial z} \left(i + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} v^2 + kR\omega v \right), \end{aligned} \quad (8.79)$$

частным решением которого является

$$i + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) + kR\omega v = \text{const.} \quad (8.80)$$

Для того чтобы это решение было справедливо для обеих границ пограничного слоя, необходимо выполнение равенства

$$i_{\infty} + \frac{1}{2} U^2 = \left(k + \frac{1}{2} \right) \omega^2 R^2 + i_{\text{от}}, \quad (8.81)$$

где $i_{\text{от}}$ есть значение теплосодержания на стенке.

Равенство (8.81) означает, что найденное решение справедливо только при параболическом изменении с радиусом R теплосодержания поверхности. Произвольная постоянная k выбирается в соответствии с конкретными условиями теплоотдачи.

¹⁾ Scheng To Chu, Tifford A. N., The compressible laminar boundary layer on a rotating body of revolution, JAS, № 5, 1954.

Если вращающаяся поверхность теплоизолирована: $\left(\frac{\partial i}{\partial z} \right)_{z=0} = 0$, то ее нагрев происходит только за счет тепла, возникающего вследствие трения. Так как согласно (8.80) $\left(\frac{\partial i}{\partial z} \right)_{z=0} = - \left(u \frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 - \left(v \frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 - kR\omega \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 =$

$$= - (k+1) R\omega \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0,$$

то условие отсутствия теплоотдачи приводит к значению $k = -1$. При этом распределение поверхностного теплосодержания будет из (8.81) равно

$$i_{\text{от}} = h_{\infty} + \frac{1}{2} (\omega R)^2. \quad (8.82)$$

Наоборот, вращающееся тело с поверхностным теплосодержанием (температурой), равным полному теплосодержанию (температуре) внешнего потока, т. е. $i_{\text{от}} = h_{\infty}$, испытывает теплообмен, так как из (8.81) при сказанных условиях следует, что $k = -\frac{1}{2}$ и уже $\left(\frac{\partial i}{\partial z} \right)_0 \neq 0$.

Заметим, что, как и в случае плоской пластинки, обтекаемой в продольном направлении, температура (теплосодержание) в пограничном слое вращающегося тела зависит лишь от касательных составляющих скорости. Это иллюстрируется формулой (8.80). Если обозначить через h полное теплосодержание в пограничном слое (без нормальных составляющих скорости):

$$h = i + \frac{1}{2} (u^2 + v^2),$$

то из (8.80) следует:

$$\frac{h - h_{\infty}}{h_{\text{от}} - h_{\infty}} = \frac{v}{\omega R}, \quad (8.83)$$

Эта формула показывает, что при числе Прандтля, равном единице, и квадратичном распределении поверхностного теплосодержания при любом законе вязкости распределение полного теплосодержания в пограничном слое подобно распределению окружной составляющей скорости. Это является обобщением на случай больших скоростей отмеченного для диска (§ 23) подобия профиля температур в пограничном слое профилю окружных скоростей.

Если продифференцировать уравнение (8.83) вблизи стенки, то получим связь между напряжением трения и коэффициентом теплоотдачи вращающейся поверхности

$$\left(\frac{\partial T_0}{\partial z}\right)_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 \frac{T_{0\text{ ст}} - T_{0\infty}}{\omega R}, \quad (8.84)$$

где под T_0 понимается абсолютная температура, соответствующая полному теплосодержанию $h = c_p T_0$.

Уравнение (8.84) обобщает соотношение (5.40) на случай больших скоростей при осевом обтекании вращающегося тела. Особенно важно отметить, что полученные результаты не зависят от переменных свойств жидкости, а также от градиента давления в меридиональном направлении, т. е. от формы поверхности.

Для решения задачи при произвольном числе Прандтля Иллингворт¹⁾, а также Тиффорд и Чжу Шень-до²⁾ вводят функцию тока ψ :

$$\frac{\rho R u}{\rho_\infty} = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\rho R w}{\rho_\infty} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (8.85)$$

с помощью которой можно перейти от переменных x, z к переменным x, ψ . Так как операция $\frac{\partial}{\partial x}$ при этом переходит в операцию $\frac{\partial}{\partial x} - R \frac{\rho}{\rho_\infty} w \frac{\partial}{\partial \psi}$, а $\frac{\partial}{\partial z}$ переходит в $\frac{R \rho}{\rho_\infty} u \frac{\partial}{\partial \psi}$, то уравнения (8.74)—(8.76) могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{v^2}{R} \frac{dR}{dx} \right) &= \rho_\infty U \frac{dU}{dx} + R^2 \frac{\rho}{\rho_\infty^2} u \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\nu \rho u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right), \\ \frac{\partial(Rv)}{\partial x} &= R^2 \frac{\partial}{\partial \psi} \left[u \frac{\rho}{\rho_\infty^2} u \frac{\partial(Rv)}{\partial \psi} \right], \\ \rho \frac{\partial l}{\partial x} + \rho_\infty U \frac{dU}{dx} &= \frac{1}{F} R^2 \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\mu \frac{\rho}{\rho_\infty} u \frac{\partial l}{\partial \psi} \right) + \\ &+ R^2 \mu \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^2 u \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \psi} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} (8.86)$$

¹⁾ Иллингворт К., Ламинарный пограничный слой вращающегося осесимметричного тела, *Механика*, № 2 (24), 1954.

²⁾ См. сноску на стр 248.

Рассмотрим, в частности, случай отсутствия градиента давления в меридиональном направлении $\frac{dU}{dx} = 0$. Пусть показатель n в формуле (8.78) зависимости вязкости от теплосодержания равняется единице, так что, согласно (8.77) и (8.78) и $p = \text{const}$:

$$\mu \rho = \nu_\infty \rho_\infty = \text{const}. \quad (8.87)$$

В этом случае уравнения (8.86) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{v^2}{R} \frac{dR}{dx} &= \nu_\infty R^2 u \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right), \\ \frac{\partial(Rv)}{\partial x} &= \nu_\infty R^2 \frac{\partial}{\partial \psi} \left[u \frac{\partial(Rv)}{\partial \psi} \right], \\ \frac{\partial l}{\partial x} &= \frac{1}{F} R^2 \nu_\infty \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial l}{\partial \psi} \right) + R^2 \nu_\infty u \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \psi} \right)^2 \right], \end{aligned} \right\} (8.88)$$

так что исчезает влияние переменности вязкости и можно целиком использовать решение для несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью ν_∞ . Достаточно вначале решить первые два уравнения для динамического пограничного слоя, а затем решить уравнение энергии.

В общем случае наличия меридионального градиента давления Иллингворт¹⁾ вводит еще преобразование Степанова—Манглера и получает систему уравнений условного «плоского» течения несжимаемой жидкости. В цитируемой работе приводится пример расчета для вращающегося круглого конуса в сверхзвуковом потоке.

§ 56. Турбулентное течение около вращающегося осесимметричного тела, обтекаемого осевым потоком²⁾

При турбулентном режиме течения уже не получается замкнутой системы уравнений, как это имеет место при ламинарном режиме. Поэтому приходится прибегать к различным приближенным приемам и к применению эмпирических зависимостей.

¹⁾ См. сноску ¹⁾ на стр. 250.

²⁾ Truckenbrodt E., Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der Reibungsschicht an axial angeströmten rotierenden Drehkörpern, *Ingenieur—Archiv*, т. 22, № 1, 1954.

Для расчетов используются интегральные соотношения импульсов. В том виде, в котором они представлены формулами (8.3) и (8.8), эти соотношения, как нетрудно заметить, справедливы и для турбулентного режима. Дальнейшее изложение проводим в виде, объединяющем случаи турбулентного и ламинарного режимов.

Рассмотрим интегральное соотношение импульсов (8.3) для меридионального направления.

Обратимся вначале к цилиндрическим участкам тела вращения ($R = \text{const}$). Расчет Хоурта для ламинарного обтекания вращающегося полубесконечного цилиндра (§ 54) показывает, что в этом случае меридиональная составляющая напряжения трения не зависит от вращения. Поэтому можно и в рассматриваемом случае полагать

$$\frac{\tau_{x0}}{\rho U^2} = \left(\frac{\tau_{x0}}{\rho U^2} \right)_{v_0=0} \quad (R = \text{const}) \quad (8.89)$$

Тогда уже из соотношения (8.3) непосредственно следует, что δ_x^{**} и δ_x^* не зависят от вращения.

В тех же местах, где $\frac{dR}{dx} \neq 0$, проявляется уже дополнительное влияние центробежных сил, связанных с вращением. Однако и в этом случае можно, исходя из результатов Шлихтинга для ламинарного режима (§ 48—52), полагать δ_x^* и δ_x^{**} независимыми от вращения. Это наглядно видно, например, из графика зависимости δ_x^{**} от ω/a для диска (см. рис. 102). В таком случае получим из соотношения (8.3) формулу

$$\frac{\tau_{x0}}{\rho U^2} = \left(\frac{\tau_{x0}}{\rho U^2} \right)_{v_0=0} + \left(\frac{v_0}{U} \right)^2 \frac{\delta_y^{**}}{R} \frac{dR}{dx} \quad (R \neq \text{const}). \quad (8.90)$$

Теперь рассмотрим интегральное соотношение (8.8) для окружного направления. В случае $R = \text{const}$, т. е. и $U = \text{const}$, из (8.3) и (8.8) получим:

$$\frac{d\delta_x^{**}}{dx} = \frac{\tau_{x0}}{\rho U^2}, \quad \frac{d\delta_{xy}^{**}}{dx} = -\frac{v_0}{U} \frac{\tau_{y0}}{\rho v_0^2}. \quad (8.91)$$

Если принять теперь, что имеется подобие профилей скоростей в окружном и меридиональном направлениях, т. е.

$$\frac{v}{v_0} = 1 - \frac{u}{U},$$

то $\delta_{xy}^{**} = \delta_x^{**}$ и из (8.91) будет следовать

$$\tau_{y0} = -\frac{v_0}{U} \tau_{x0}. \quad (8.92)$$

По аналогии с пластиной, обтекаемой плоским потоком, примем следующую зависимость:

$$\frac{\tau_{x0}}{\rho U^2} = \frac{\alpha}{\left(\frac{U \delta_x^{**}}{\nu} \right)^n}. \quad (8.93)$$

Тогда по (8.92) для τ_{y0} получим:

$$\frac{\tau_{y0}}{\rho v_0^2} = -\frac{U}{v_0} \frac{\alpha}{\left(\frac{U \delta_{xy}^{**}}{\nu} \right)^n}. \quad (8.94)$$

Для пластины $n = 1$, $\alpha = 0,22$ при ламинарном режиме, $n = 1/6$, $\alpha = 0,0065$ при турбулентном режиме [по Фокнеру¹⁾].

Примем, что соотношения (8.92)—(8.94) справедливы и при $R \neq \text{const}$, $U \neq \text{const}$. В подтверждение такого допущения приведем пример вращающегося диска, для которого эти соотношения справедливы (см. § 16).

Величину α в формулах (8.93), (8.94) удобней выразить через коэффициент сопротивления c_f пластины длины l , обтекаемой со скоростью U_∞ :

$$(1+n)\alpha = \left(\frac{U_\infty l}{\nu} \right)^n \left(\frac{c_f}{2} \right)^{1+n}. \quad (8.95)$$

Это выражение получается из закона сопротивления пластины

$$c_f = c \left(\frac{U_\infty l}{\nu} \right)^{-\frac{n}{n+1}}, \quad (8.96)$$

где $n = 1$, $c = 1,328$ для ламинарного течения; $n = 1/4$, $c = 0,074$ для турбулентного течения (по Прандтлю). При больших числах Рейнольдса $n = 1/6$, $c = 0,0306$ (по Фокнеру).

Приступая к решению задачи, заметим, что из сказанного выше следует, что интегральные соотношения импульсов можно разрешать независимо друг от друга.

¹⁾ Falkner V. M., Aircraft Engineering, March, 1943.

Если подставить выражение (8.90) в интегральное соотношение (8.3), то оно примет вид:

$$\frac{1}{U^2 R} \frac{d}{dx} (U^2 R \delta_x^{**}) + \frac{\delta_x^{**}}{U} \frac{dU}{dx} = \left(\frac{\tau_{x0}}{\rho U^2} \right)_{v_0=0}. \quad (8.97)$$

Такой вид имеет интегральное соотношение пограничного слоя для обдуваемого осевым потоком невращающегося осесимметричного тела, решение для которого известно¹⁾. Это решение равно

$$\frac{\delta_x^{**}}{l} = \frac{\left[C_1^* + \left(\frac{c_f}{2} \right)^{1+n} \int_{\frac{x_1}{l}}^{\frac{x}{l}} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{3+2n} \left(\frac{R}{l} \right)^{1+n} d \left(\frac{x}{l} \right) \right]^{\frac{1}{1+n}}}{\left(\frac{U}{U_\infty} \right)^3 \frac{R}{l}}. \quad (8.98)$$

Постоянная интегрирования C_1^* определяется величиной δ_x^{**} для ламинарного участка:

$$C_1^* = \left[\left(\frac{U}{U_\infty} \right)^3 \frac{R}{l} \frac{\delta_x^{**}}{l} \right]_{x=x_1}^{1+n} = \left\{ \frac{c_{fл}}{2} \left[\int_0^{\frac{x_1}{l}} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^5 \left(\frac{R}{l} \right)^2 d \left(\frac{x}{l} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{1+n}. \quad (8.99)$$

В случае чисто турбулентного (чисто ламинарного) течения $x_1 = 0$ и $C_1^* = 0$.

Из интегрального соотношения (8.8) для окружного направления и формулы (8.94) получаем:

$$\frac{d}{dx} (UR^3 \delta_{xy}^{**}) = \frac{\alpha}{\left(\frac{U \delta_{xy}^{**}}{\nu} \right)^n} UR^3. \quad (8.100)$$

Это уравнение с помощью подстановки

$$\chi = UR^{3(n+1)} \delta_{xy}^{**} \left(\frac{U \delta_{xy}^{**}}{\nu} \right)^n$$

¹⁾ Truckenbrodt E., Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschicht bei ebener und rotationssymmetrischer Strömung, Ingenieur-Archiv, т. 20, № 4, 1952.

решается в квадратурах:

$$\left(\frac{U \delta_{xy}^{**}}{\nu} \right)^n \delta_{xy}^{**} = \frac{k_1 + (1+n)\alpha \int_{x_1}^x UR^{3(1+n)} dx}{UR^{3(1+n)}}. \quad (8.101)$$

Заменяя $(1+n)\alpha$ через c_f для пластины длины l , обтекаемой со скоростью U_∞ [формула (8.95)], получим окончательно:

$$\frac{\delta_{xy}^{**}}{l} = \frac{\left[k_1^* + \left(\frac{c_f}{2} \right)^{1+n} \int_{\frac{x_1}{l}}^{\frac{x}{l}} \frac{U}{U_\infty} \left(\frac{R}{l} \right)^{3(1+n)} d \left(\frac{x}{l} \right) \right]^{\frac{1}{1+n}}}{\frac{U}{U_\infty} \left(\frac{R}{l} \right)^3}, \quad (8.102)$$

где постоянная интегрирования k_1^* равна

$$k_1^* = \left[\frac{U}{U_\infty} \left(\frac{R}{l} \right)^3 \frac{\delta_{xy}^{**}}{l} \right]_{x=x_1}^{1+n} = \left\{ \frac{c_{fл}}{2} \left[\int_0^{\frac{x_1}{l}} \frac{U}{U_\infty} \left(\frac{R}{l} \right)^6 d \left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}^{1+n}. \quad (8.103)$$

Сопоставляя (8.98) и (8.102), замечаем, что изменение U вдоль тела оказывает большее влияние на δ_x^{**} , чем на δ_{xy}^{**} , в то время как изменение R больше влияет на δ_{xy}^{**} , чем на δ_x^{**} .

Если для ламинарного режима точка отрыва определяется значением параметра

$$\chi^* = \frac{U \delta_x^{**}}{\nu} \delta_x^{**} \left[\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} + \left(\frac{v_0}{U} \right)^2 \frac{1}{R} \frac{dR}{dx} \right],$$

равным $\chi_A^* = -0,1567$, то для турбулентного течения нет точной теории расчета отрыва. Поэтому введем Γ по формуле

$$\Gamma = \left(\frac{U \delta_x^{**}}{\nu} \right)^n \delta_x^{**} \left[\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} + \left(\frac{v_0}{U} \right)^2 \frac{1}{R} \frac{dR}{dx} \right], \quad (8.104)$$

что является обобщением χ^* [см. формулы (8.32) и (8.27)].

В случае отсутствия вращения Γ переходит в параметр Бури¹⁾ для осесимметричного тела; в этом случае можно найти приближенное значение $\Gamma = \Gamma_{A_0}$, при котором наступает отрыв, а затем рассчитать положение точки отрыва²⁾. Точку отрыва при вращении можно найти из условия $\Gamma_A = \Gamma_{A_0}$, т. е.

$$\left\{ \left(\frac{U \delta_x^{**}}{\nu} \right)^n \delta_x^{**} \left[\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} + \left(\frac{v_0}{U} \right)^2 \frac{1}{R} \frac{dR}{dx} \right] \right\}_{x_A} = \left\{ \left(\frac{U \delta_x^{**}}{\nu} \right)^n \delta_x^{**} \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} \right\}_{x_{A_0}}$$

Так как отрыв наступает обычно при $\frac{dU}{dx} < 0$ и $\frac{dR}{dx} \leq 0$, то отсюда получаем $\delta_x^{**}(x_A) < \delta_x^{**}(x_{A_0})$, т. е. отрыв при вращении наступает раньше. Это согласуется с результатами Шлихтинга (§ 52).

Момент трения определяется формулой (8.40), поэтому для коэффициента момента (8.42), согласно (8.102), будем иметь:

$$c_M = 4\pi \frac{U_\infty}{V_m} \left[k_1^* + \left(\frac{c_f}{2} \right)^{1+n} \int_{\frac{x_1}{l}}^{\frac{x_2}{l}} \frac{U}{U_\infty} \left(\frac{R}{R_m} \right)^{3(1+n)} d\left(\frac{x}{l} \right) \right]^{\frac{1}{1+n}} \quad (8.105)$$

где x_2 соответствует точке отрыва или конечной точке поверхности.

Из полученной формулы следует, что при постоянной скорости натекания U_∞ коэффициент c_M обратно пропорционален скорости вращения.

При полностью ламинарном (полностью турбулентном) течении ($x_1 = 0, k_1^* = 0$) из (8.105) следует:

$$c_M \sim \frac{U_\infty}{V_m} \left(\frac{U_\infty l}{\nu} \right)^{-\frac{n}{1+n}} \sim \left(\frac{U_\infty}{V_m} \right)^{\frac{1}{1+n}} \left(\frac{V_m R_m}{\nu} \right)^{-\frac{n}{1+n}}$$

Поэтому при постоянной окружной скорости

$$M \sim U_\infty^{1+n},$$

¹⁾ См. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, ИЛ, 1956.

²⁾ См. сноску на стр. 254.

т. е. в случае ламинарного течения ($n=1$) $M \sim \sqrt{U_\infty}$, а при турбулентном режиме момент растет со скоростью U_∞ почти линейно.

Рассмотрим примеры расчетов, приведенные в цитируемой работе Труккенбротда.

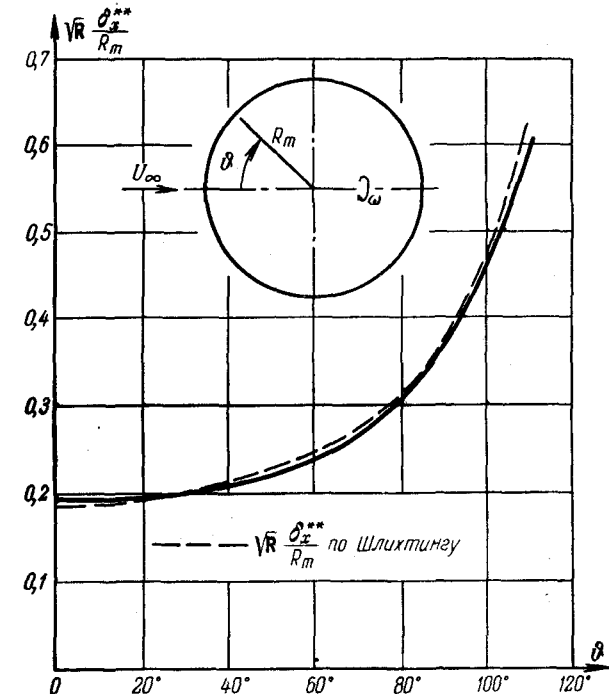


Рис. 114. Значение δ_x^{**} для шара при ламинарном режиме (по Труккенбротду).

а) Вращающийся диск. В этом случае $U = aR, x = R, l = R_m$. Тогда, положив $x_1 = 0 (k_1^* = 0), x_2 = R_m$, получим из (8.105) следующую формулу:

$$c_M = A \left(\frac{a}{\omega} \right)^{\frac{1}{1+n}} \left(\frac{\omega R_m^2}{\nu} \right)^{-\frac{n}{1+n}}, \quad (8.106)$$

где

$$A = 2\pi c (5 + 3n)^{-\frac{1}{1+n}}. \quad (8.107)$$

Для ламинарного режима получим $A = 2,95$ вместо $A = 3,17$ для асимптотического решения¹⁾, а для турбулентного $A = 0,115$ вместо $0,113$ для асимптотического решения (§ 20).

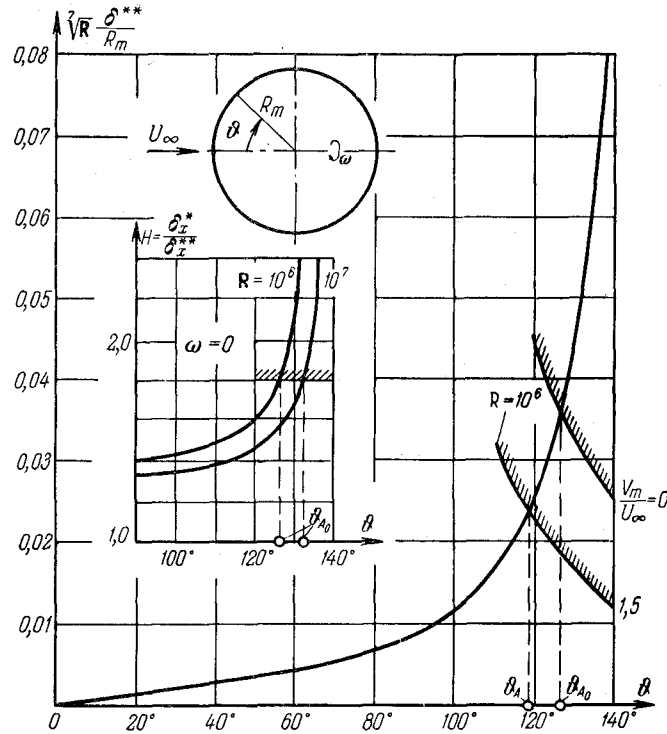


Рис. 115. Значения δ_x^{**} для вращающегося шара при турбулентном режиме (по Трункенброту).

б) Вращающийся шар. При $x_1 = 0$, т. е. $c_1^* = k_1^* = 0$, получим формулу

$$\frac{\delta_x^{**}}{R_m} = \frac{\delta_x^{**}}{R_m} = \frac{\delta_{xy}^{**}}{R_m} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{1+n}} \frac{c_f}{2} \frac{\left[\int_0^\vartheta \sin^{4+3n}\vartheta d\vartheta \right]^{\frac{1}{1+n}}}{\sin^4 \vartheta}.$$

1) См. сноску 1) на стр. 33.

Сравнение с результатом Шлихтинга для ламинарного режима (рис. 114) показывает очень хорошее совпадение. На рис. 115 приведены величины δ_x^{**} для турбулентного режима, а также значения $H = \delta_x^* / \delta_x^{**}$ при отсутствии вращения. При этом значения δ_x^* вычислены методом Трункенброта¹⁾.

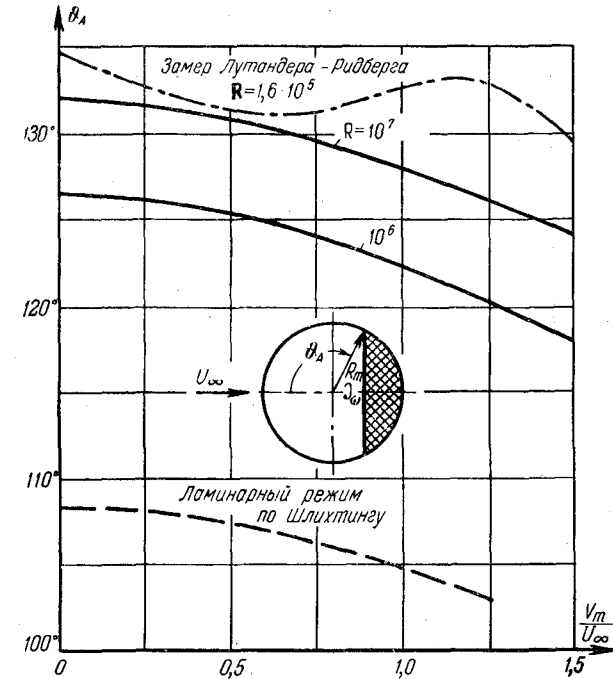


Рис. 116. Положение точки обрыва обдуваемого вращающегося шара (по Трункенброту).

Для определения точки отрыва полагалось, что при отсутствии вращения $H = 1,8$ в точке отрыва.

На рис. 116 приведены результаты расчетов точки отрыва и опытные данные Лутандера и Ридберга²⁾. При больших числах Рейнольдса и малых V_m/U_∞ для турбулентного режима расчет и опыт одинаково дают с увеличением скорости вращения смещение точки отрыва к меньшим ϑ .

1) См. сноску на стр. 254.

2) См. сноску на стр. 230.

Вычисление c_M при $x_1 = 0$ и $\vartheta_2 = \pi$ можно провести в замкнутом виде, и получается

$$R \frac{n}{1+n} \frac{V_m}{U_\infty} c_M = 2\pi c \left[\frac{3\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{5+3n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta+3n}{2}\right)} \right]^{\frac{1}{1+n}}, \quad (8.108)$$

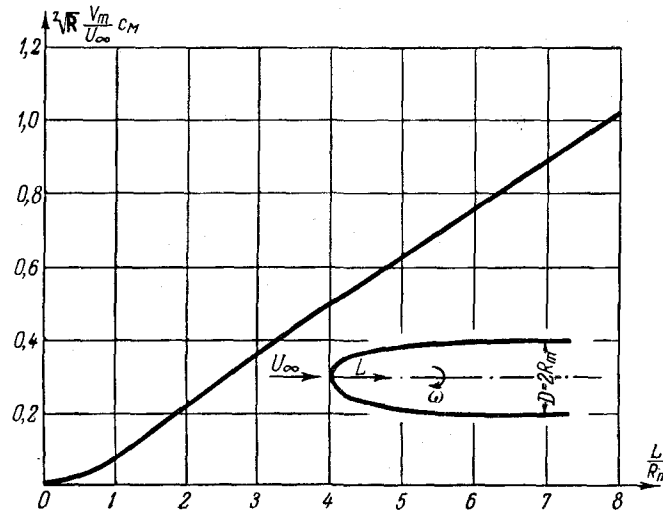


Рис. 117. Коэффициент момента трения при вращении полутела вращения для турбулентного режима (по Грукенбродту).

где Γ — гамма-функция Эйлера. Отсюда имеем:

$$\text{для ламинарного режима } c_M = \frac{9,76 U_\infty}{\sqrt{R} V_m}, \quad (8.109)$$

$$\text{для турбулентного режима } c_M = \frac{0,299 U_\infty}{R^{1/7} V_m}. \quad (8.110)$$

в) Вращающееся полутело вращения. Получаемые по формуле (8.105) значения c_M очень хорошо совпадают с результатами Шлихтинга, изображенными на рис. 107. Значения c_M для турбулентного режима представлены на рис. 117. В цитируемой работе приводятся также результаты расчетов для вращающихся эллипсоидов вращения.